

1. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 에서 함수 f 를 $f(x) = (x^2 \text{을 } 4 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의하고
 집합 $B = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ 에서 함수 g 를 $g(x) = (x^2 \text{을 } 8 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의하자.
 두 함수 f, g 의 치역을 각각 P, Q 라고 할 때, 집합 $P \cup Q$ 는?

① $\{0, 1\}$

② $\{0, 4\}$

③ $\{0, 1, 4\}$

④ $\{0, 2, 4\}$

⑤ $\{1, 2, 4\}$

해설

(i) 집합 A 의 원소 x 를 $x = 2k - 1$

(단, $k = 1, 2, 3, \dots$) 로 놓으면

$x^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$ 이므로 x^2 을 4로 나눈 나머지는 1이다.

$\therefore P = \{1\}$

(ii) 집합 B 의 원소 x 중 0, 4, 8, 12, $\dots$ 은 $x = 4k$ (단, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$) 로 나타내고

2, 6, 10, $\dots$ 은 $x = 4k - 2$

(단, $k = 1, 2, 3, \dots$) 로 놓자.

먼저 $x = 4k$ 일 때,

$x^2 = (4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$ 이므로

x^2 을 8로 나눈 나머지는 0이다.

또, $x = 4k - 2$ 일 때,

$x^2 = (4k - 2)^2$

$= 16k^2 - 16k + 4$

$= 8(2k^2 - 2k) + 4$ 이므로

x^2 을 8로 나눈 나머지는 4이다.

$\therefore Q = \{0, 4\}$

(i), (ii)로부터 $P \cup Q = \{0, 1, 4\}$

2. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x) - y = x - f(y) + 1$ 을 만족시키는 함수 f 에 대하여 $f(1)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$f(x) + f(y) = x + y + 1$$

$$x = y = 1 \text{ 일 때, } f(1) + f(1) = 3$$

$$\text{따라서 } f(1) = \frac{3}{2}$$

3. 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $f(1) = 0$

② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$

④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f(8) = 3f(2)$

해설

임의의 양수 x, y 에 대하여

$f(xy) = f(x) + f(y)$ 가 성립해야하므로

① $x = 1, y = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

$\therefore$ 참

② $x = 2, y = 3$ 을 대입하면

$$f(6) = f(2) + f(3)$$

$\therefore$ 참

③ $x = x, y = x$ 를 대입하면

$$f(x^2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

$$\therefore f(x^2) \neq f(2x)$$

$\therefore$ 거짓

④ $x = x, y = \frac{1}{x}$ 를 대입하면

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

① 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$\therefore$ 참

⑤ $x = 4, y = 2$ 를 대입하면,

$$f(4 \times 2) = f(4) + f(2) \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $4 = 2 \times 2$ 이므로,

$$f(4) = f(2) + f(2) \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 에서 $f(8) = 3f(2)$

$\therefore$ 참

4. $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3x + 2$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 8

④ 11

⑤ 12

해설

$$\frac{x+1}{2} = 2 \text{에서 } x = 3$$

$$\therefore f(2) = 11$$

5. 공집합이 아닌 집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$$f(x) = g(x)$$

$$\text{즉 } x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

X 는 집합 $\{-2, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

6. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{y | y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 두 함수 f, g 를 X 에서 Y 로의 함수로 정의한다. $f(x) = x - 1$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f = g$ 에서

$f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots \textcircled{\text{㉢}}$

$\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$, $\textcircled{\text{㉢}}$ 에서 $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$

$\therefore abc = 0$

7. 두 집합 $X = \{-1, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$ 가 서로 같을 때, 상수 a , b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로

$f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.

$$-a - b = -3, \quad a - b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$

$$\therefore a + b = 3$$

8. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = x^3 - 2x$ 가 같을 때, X 의 개수는 몇 개인가?

① 3개

② 4개

③ 7개

④ 8개

⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x) = g(x)$ 에서

$$x^2 = x^3 - 2x, x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0, x = -1, 0, 2$$

$$\therefore X = \{-1, 0, 2\}$$

따라서 X 의 공집합을 제외한

부분집합이 되므로 7개