1. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로
$a-2>0$
$x \geq \dfrac{4}{a-2}$이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$
$\therefore a=4$

2. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 2$

해설

부등식 $2x - 4 > 0$ 에서

$x > 2 \cdots\cdots$ ①

부등식 $2x^2 - 3x + 1 > 0$ 에서

$(2x - 1)(x - 1) > 0$

$\therefore x > 1$ 또는 $x < \frac{1}{2} \cdots\cdots$ ②

따라서, 구하는 해는 ①과 ②를

동시에 만족하는 x 의 값이므로

$\therefore x > 2$

3. 수직선 위의 두 점 A(-2), B(4)에 대하여 P(-5)일 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$를 구한다.

$\mathrm{A}(-2), \mathrm{B}(4), \mathrm{P}(-5)$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{PA}}=|-5-(-2)|=3, \overline{\mathrm{PB}}=|-5-4|=9$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=3+9=12$

4. 두 점 $\mathrm{A}(-5,-1)$, $\mathrm{B}(4,-5)$에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

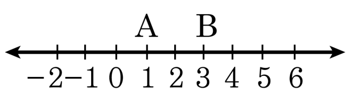
① $\left(\frac{15}{26}, \frac{15}{26}\right)$ ② $\left(\frac{13}{26}, -\frac{13}{26}\right)$ ③ $\left(\frac{13}{26}, -\frac{15}{26}\right)$
④ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{13}{26}\right)$ ⑤ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$ 라 하면, $(\because\ y=-x)$
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$
$(a+5)^2+(-a+1)^2=(a-4)^2+(-a+5)^2$
$a^2+10a+25+a^2-2a+1$
$=a^2-8a+16+a^2-10a+25$
$\Rightarrow\ 26a=15 \Rightarrow\ a=\frac{15}{26}$
$\therefore \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{15}{26},-\frac{15}{26}\right)$

5. 다음 빈 칸에 들어갈 수를 차례로 써라.

다음 수직선의 점들 중에서 선분 AB를 $2:1$ 로 외분하는 점의 좌표는 (　) 이고, $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는 (　) 이다.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

선분 AB를 $2:1$ 로 외분하는 점은 선분 AB의 오른쪽 연장선 위에 있다.
선분 AB를 $2:1$ 로 외분하는 점을 Q라 놓으면 선분 AQ의 길이와 선분 BQ의 길이의 비가 $2:1$ 이 되어야 하므로 구하는 점 Q의 좌표는 Q(5) 이다.
선분 AB를 $1:2$ 로 외분하는 점은 선분 AB의 왼쪽 연장선 위에 있다.
선분 AB를 $1:2$ 로 외분하는 점을 R라 놓으면 선분 AR의 길이와 선분 BR의 길이의 비가 $1:2$ 이 되어야 하므로 구하는 점 R의 좌표는 R(-1) 이다.

6. 기울기가 3 이고 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.(단, $a,\ b$ 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

기울기가 3 이고 점 $(-2,\ 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은
$y = 3(x + 2) + 3 = 3x + 9$
따라서 $a = 3,\ b = 9$
$\therefore\ a + b = 12$

7. x축의 양의 방향과 $30°$를 이루고 x절편이 -1인 직선의 방정식은 $ax+by+1=0$이다. 이 때, ab의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② -1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 준 직선은 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고,

점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선이다.

$\therefore\ y-0=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$

$\therefore\ x-\sqrt{3}y+1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=-\sqrt{3}$

8. 점 (3, 2) 을 지나고 직선 $x+3y-2=0$ 에 수직인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-3x+7$ ② $y=3x-7$ ③ $y=3x-5$
④ $y=3x+5$ ⑤ $y=2x-4$

해설

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 에 수직하므로 기울기는 3 이고, 점 $(3,2)$ 를 지나므로,
직선의 방정식 : $y=3(x-3)+2=3x-7$

9. 세 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$, $5x+2y+k=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면
직선 $5x+2y+k=0$ 이 두 직선
$2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점을 지나야 한다.
두 직선 $2x+3y-4=0$, $3x-y+5=0$ 의 교점이 $(-1, 2)$ 이므로
$x=-1$, $y=2$를 $5x+2y+k=0$ 에 대입하면
$5\cdot(-1)+2\cdot 2+k=0$
$\therefore\ k=1$

10. 점 $(2,\ 1)$에서 직선 $y=x+1$에 이르는 거리는?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$y=x+1$은 $x-y+1=0$이다.
점$(2,\ 1)$에서 $x-y+1=0$에 이르는 거리는
$\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

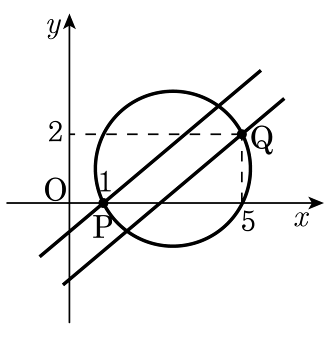
11. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 의 중심을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=2x+1$ ② $y=2x-1$ ③ $y=-x-1$
④ $y=-x+1$ ⑤ $y=x+1$

해설

두 원의 중심은 $(-2,1)$, $(2,-3)$
$\Rightarrow$ 두 점을 지나는 직선은
$y=\dfrac{-3-1}{2-(-2)}(x-2)-3$
$\rightarrow$ $y=-x-1$

12. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점 C(3, 1)이므로,
$r^2 = \overline{PC}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

13. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

14. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서
$x^2=t$로 치환하면
$t^2+3t-10=0$, $(t+5)(t-2)=0$
$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$
$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

15. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $y=2$

▷ 정답 : $z=3$

해설

① + ②에서 $3x+2y=7$ ⋯⋯④
① + ③에서 $2x+3y=8$ ⋯⋯⑤
④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$
이 값을 ①에 대입하면 $z=3$
$\therefore$ $x=1$, $y=2$, $z=3$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

17. 이차부등식 $ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a<0$ ③ $a<2$
④ $a<4$ ⑤ $a<8$

해설

$ax^2+4x+a<0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하려면
ⅰ) $a<0$
ⅱ) $ax^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=2^2-a^2<0$
$a^2-4>0, (a+2)(a-2)>0$
$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $a<-2$

18. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$
② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$
③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$
④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$
⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

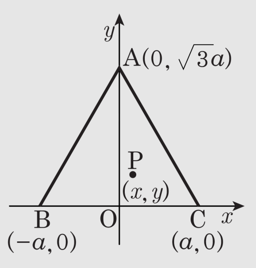
$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로
$a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$
양변에 a 를 곱하면
$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$
$ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta > 0$
$\therefore\ b = -a(\alpha+\beta),\ c = a\alpha\beta$
따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면
$a\alpha\beta x^2 + a(\alpha+\beta)x + a > 0$
$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)x + 1 < 0$
$(\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$
$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$ ($\because 0 < \alpha < \beta$)

19. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

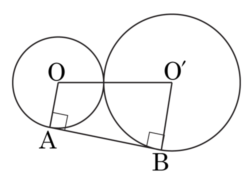
20. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

21. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?
(단, $\overline{OO'} = 5\,\text{cm}$, $\overline{OA} = 2\,\text{cm}$, $\overline{O'B} = 3\,\text{cm}$ 이다.)



① $\sqrt{6}\,\text{cm}$　　② $2\sqrt{5}\,\text{cm}$　　③ $2\sqrt{6}\,\text{cm}$

④ $\sqrt{5}\,\text{cm}$　　⑤ $3\sqrt{5}\,\text{cm}$

해설

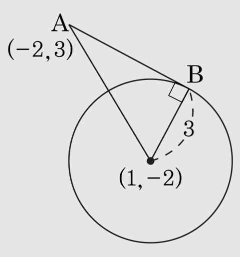
$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3-2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$

22. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$

23. 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1,-3)$에서 원에 그은 접선의 x절편은?

① -10　② $-\frac{10}{3}$　③ -1　④ 10　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1,-3)$에서 그은 접선의 방정식은
$1\,x-3\,y=10$
x절편은 $y=0$일 때의 x좌표이므로 $x=10$

24. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ⋯⋯㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ⋯⋯㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ⋯⋯㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ⋯⋯㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

25. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ……㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$ ……㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

26. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

27. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3},\ y = -\sqrt{3}$　　② $x = 2,\ y = 1$

③ $x = -\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}$　　④ $x = -2,\ y = -1$

⑤ $x = 2,\ y = -1$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해는 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ (복호동순)

28. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

29. 이차함수 $y = x^2 - 4px + 5 - p$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 p 의 범위가 $p < \alpha$, $p > \beta$ 일 때 $\alpha + \beta$ 의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

$y = x^2 - 4px + 5 - p$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면
판별식 D 가 $D > 0$ 이다.

$\frac{D}{4} = (-2p)^2 - 5 + p > 0$

$4p^2 + p - 5 > 0$

$(p-1)(4p+5) > 0$

$\therefore\ p < -\frac{5}{4}, p > 1$

따라서 $\alpha = -\frac{5}{4}, \beta = 1$ 이므로

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{1}{4}$

30. 이차방정식 $ax^2 - (a+1)x - 4 = 0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a > 3$　② $0 < a < 3$　③ $a \geq \frac{1}{2}$
④ $a \geq 1$　⑤ $-1 < a < 3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$ 이어야 한다.
따라서 $f(-1) = a + (a+1) - 4 > 0$ 에서
$2a > 3 \quad \therefore a > \frac{3}{2} \cdots$ ㉠
$f(2) = 4a - 2a - 2 - 4 > 0$ 에서
$2a > 6 \quad \therefore a > 3 \cdots$ ㉡
㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로
구하는 a의 값의 범위는 $a > 3$

31. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{P}(0,b)$, $\mathrm{Q}(a,0)$, $\mathrm{B}(5,1)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$ 의 최솟값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 $\mathrm{A}\,(1,2)$ 의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1,2)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$ 의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5,-1)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$ 이므로 $k^2=45$

32. 세 점 $A(2,1), B(1,3), C(2,0)$ 에 대하여 $2\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$　② $x+2y+3=0$　③ $x-3y-2=0$
④ $x-4y+5=0$　⑤ $x-5y+4=0$

해설

점 P의 좌표를 (x,y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2+(y-1)^2\\ &= x^2-4x+4+y^2-2y+1\\ &= x^2-4x+y^2-2y+5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2+(y-3)^2\\ &= x^2-2x+1+y^2-6y+9\\ &= x^2-2x+y^2-6y+10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2+y^2\\ &= x^2-4x+4+y^2\\ &= x^2-4x+y^2+4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=3\overline{CP}^2$ 에서

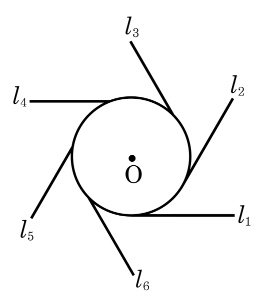
$2\left(x^2-4x+y^2-2y+5\right)+x^2-2x+y^2-6y+10=3\left(x^2-4x+y^2+4\right)$

$3x^2-10x+3y^2-10y+20=3x^2-12x+3y^2+12$

$2x-10y+8=0$

$\therefore x-5y+4=0$

33. 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. l_1 의 기울기가 0 일 때, l_3 의 기울기는?

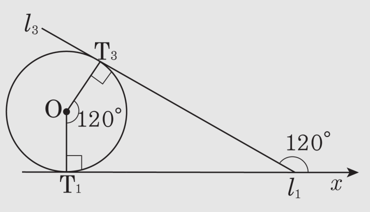


① -3 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1

④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

해설

문제의 조건에서 l_1 의 기울기가 0 이므로
다음 그림과 같이 l_1 을 x 축으로 놓으면,
l_3 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $120°$ 이다.
따라서 구하는 기울기 m 은
$m = \tan 120° = -\sqrt{3}$



34. 두 직선 $3x+(a-1)y-1=0$과 $ax+2y-1=0$이 공유점을 갖지 않을 때의 a의 값과, 공유점을 무수히 많이 가질 때의 a의 값의 곱은?

① 3　　② ±6　　③ −6　　④ 6　　⑤ ±3

해설

$3x+(a-1)y-1=0 \cdots$ ㉠
$ax+2y-1=0 \cdots$ ㉡

1. ㉠, ㉡ 가 공유점을 갖지 않을 때는
   ㉠, ㉡ 가 평행할 때이므로
   $\frac{3}{a}=\frac{a-1}{2}\neq 1$
   $\rightarrow\ 6=a^2-a\ \rightarrow\ a^2-a-6=0$
   $\rightarrow\ (a+2)(a-3)=0$
   $\therefore\ a=-2$ ($\because\ a=3$이면 일치한다.)
2. ㉠, ㉡ 가 공유점을 무수히 많이 가질 때는
   ㉠, ㉡ 가 일치할 때이므로
   $\frac{3}{a}=\frac{a-1}{2}=1\ \rightarrow\ a=3$ ($\because\ a\neq -2$)

$\therefore\ -2\times 3=-6$

35. 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나므로 각각 대입하면,
$(1-a)^2+(4-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉠
$(3-a)^2+(2-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,
$a=1, b=2$ 또는 $a=9,\ b=10$
$\therefore$ 두 원의 반지름의 합은 $10+2=12$

36. 제1사분면에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원 C_1과 y축에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 다음 조건을 만족할 때, 원 C_1의 중심의 x좌표와 원 C_2의 중심의 y좌표의 합을 구하면?

> (가) 두 원 C_1, C_2는 외접한다.
> (나) 두 원 C_1, C_2의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1이다.

① $1+\sqrt{2}$　② $2+2\sqrt{2}$　③ $3+3\sqrt{2}$
④ $4+4\sqrt{2}$　⑤ $5+5\sqrt{2}$

해설

두 원 C_1, C_2의 방정식을 각각
$(x-a)^2+(y-2)^2=4\ (a>0)$
$(x-1)^2+(y-b)^2=1\ (b>0)$로 놓을 수 있다.
이 때, (가)에서 두 원이 외접하므로 두 원의 중심
$A(a, 2)$, $B(1, b)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

따라서, $\sqrt{(1-a)^2+(b-2)^2}=3$

양변을 제곱하면 $(a-1)^2+(b-2)^2=9 \cdots\cdots$ ㉠
(나)에서 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{b-2}{1-a}=-1$

$b-2=a-1$

$\therefore b=a+1 \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a-1)^2+(a-1)^2=9$

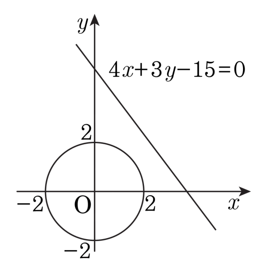
$2a^2-4a-7=0$

$\therefore a=1\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (a>0)

㉡에서 $b=a+1=2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a+b=3+3\sqrt{2}$

37. 다음 그림과 같이 원점이 중심이고 반지름의 길이가 2 인 원이 있다. 직선 $4x+3y-15=0$ 위의 한 점 P 에서 이 원까지의 최단거리는 ?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

직선 위의 한 점 P 에서 원까지의 최단거리는 원점에서 직선까지의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것이다.

따라서 (최단거리) $= \dfrac{|0+0-15|}{\sqrt{4^2+3^2}} - 2$

$= \dfrac{15}{5} - 2 = 3 - 2 = 1$

38. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α이므로
$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$
$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$
$k=0$ 또는 $\alpha=1$
$k=0$이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
$\therefore$ $\alpha=1$을 대입하면
$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\dfrac{2}{3}$
$\therefore$ $3k+\alpha=-1$

39. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b), $(3, 4)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.
따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로
$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

40. 정점 $A(3,\ 2)$와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$
② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$
④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $Q(a,b)$ 라고 하면
$3a-4b-11=0 \cdots$ ①
$\overline{AQ}$ 의 중점을 $P(x,y)$ 라고 하면
$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2 \quad \cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$
$\therefore\ 3x-4y-6=0$