1. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$\text{(좌변)} = \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$= \frac{6-7i}{3} = 2-\frac{7}{3}i \text{ 이므로}$$

$2-\dfrac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)=2+7=9$

2. $\dfrac{5}{1+2i} = x + yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = -1$

해설

$\dfrac{5}{1+2i} = \dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$

$1-2i = x + yi$

$x = 1, y = -2, x + y = -1$

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

4. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$

$\therefore a = 1,\ b = -2$

$\therefore a - b = 3$

5. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \quad \Rightarrow \quad x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$
이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

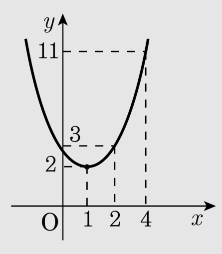
6. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

7. 부등식 $|x-3| \geq 2$의 해로 다음 중 옳은 것은?

① $1 \leq x \leq 5$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$
③ $-1 \leq x \leq 5$
④ $x \leq -1$ 또는 $x \geq 5$
⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

$|x-3| \geq 2$에서 $x-3 \geq 2$ 또는 $-(x-3) \geq 2$ $\therefore$ $x \geq 5$ 또는 $x \leq 1$

8. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \quad \alpha + \beta = -4$

9. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

10. x 에 대한 다항식 $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)-4$를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2+2x+4)(x^2+2x-1)$

② $(x^2+2x+4)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

③ $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

④ $(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

해설

$x^2+2x=Y$ 라 하면,
(준식)
$=Y^2+3Y-4=(Y-1)(Y+4)$
$=(x^2+2x-1)(x^2+2x+4)$
$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

11. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1　　② 0　　③ -1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$

$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$

$Y=2$ 또는 $Y=6$

(i) $Y=2$

$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $Y=6$

$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

12. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$

$(-1)\times 2+2\times 3+(-1)\times 3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$

세 근의 곱 $(-1)\times 2\times 3=-6 \quad \therefore c=6$

$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

13. x, y 의 연립방정식 $ax + y = 1, x + ay = 1$ 의 근이 존재하기 위한 a 의 조건은?

① $a \neq 2$ ② $a = \pm 1$ ③ $a \neq \pm 2$
④ $a \neq -1$ ⑤ $a \neq -2$

해설

$ax + y - 1 = 0,\ x + ay - 1 = 0$ 으로 변형하면,

ⅰ) $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$ 일 때, 오직 한 근을 가진다.

$a^2 \neq 1, \quad \therefore\ a \neq \pm 1$

ⅱ) $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$ 일 때, 해가 무수히 많다.

$\therefore\ a = 1$

ⅰ), ⅱ) 에 의해서, $a \neq -1$ 일 때 해가 존재한다.

14. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 모두 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 :

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0$ 또는 1

(ii) $x = 2y$ 일 때 :

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0$ 또는 $-\frac{1}{3}$

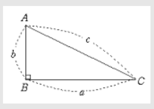
$\therefore (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

15. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설



$\frac{1}{2}ab = 30,\ ab = 60$

$a + b + c = 30,\ a + b = 30 - c$

$a^2 + b^2 = c^2\ (a + b)^2 - 2ab = c^2$

$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$

$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$

$60c = 780,\ \therefore\ c = 13$

16. $xy-3x-3y+4=0$을 만족하는 양의 정수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$xy-3x-3y+4=0$에서
$x(y-3)-3(y-3)-5=0,\ (x-3)y-3=5$
$x \geq 1,\ y \geq 1$이므로 $x-3 \geq -2,\ y-3 \geq -2$
(ⅰ) $x-3=1,\ y-3=5$일 때, $x=4.\ y=8$
(ⅱ) $x-3=5,\ y-3=1$일 때, $x=8,\ y=4$
따라서, 구하는 값은 $x+y=4+8=8+4=12$

17. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

18. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z + \bar{z} = 0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z + \bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z - \bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$
㉠ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow$ 실수
㉡ $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 0, a = 0$
$\therefore\ z = bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)
㉢ $z + \bar{z} = 2a \Rightarrow$ 실수
㉣ $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$
순허수로 판단하기 쉬우나, $b = 0$ 인 경우
$z - \bar{z} = 0$ 으로 순허수가 아니다.
㉤ $\frac{1}{z} = c + di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\frac{1}{z}} = c - di$ 이므로 참

19. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2　② $\frac{5}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면
다른 한 근은 $\frac{1}{a}$이다.
$\therefore\ a+\frac{1}{a}=k^2=\frac{2k+5}{3}$
$\therefore\ 3k^2-2k-5=0$
$k=\frac{5}{3}$ 또는 -1
$\therefore$ 양수 $k=\frac{5}{3}$

20. 실수 x, y 가 방정식 $x^2+2xy+2y^2+y-6=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2yx+2y^2+y-6=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=y^2-(2y^2+y-6)\ge 0$

$y^2+y-6\le 0$, $(y+3)(y-2)\le 0$

$\therefore -3\le y\le 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

21. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 1

해설

$|x| < |a| \iff x^2 < a^2 \iff x^2 - a^2 < 0 \cdots$ ①

$\iff ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$ ②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

22. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\frac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

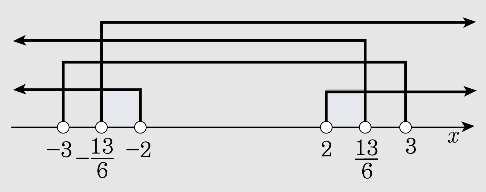
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

23. $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 이라 할 때, $3x^3+4x^2+3x+3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}i}{2}}{\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}i}{-1-\sqrt{5}i}$$

$\therefore x = \dfrac{1+2\sqrt{5}i}{3}$ $3x-1 = (3x-1 = 2\sqrt{5}i)$, 양변을 제곱해서 정리하면

$3x^2-2x+7=0$

$3x^3+4x^2+3x+3$ 를 $3x^2-2x+7$ 로 나누면 몫이 $x+2$, 나머지가 -11 이다.

즉, $3x^3+4x^2+3x+3 = (3x^2-2x+7)(x+2)-11$

$3x^2-2x+7=0$ 이므로

$\therefore\ 3x^3+4x^2+3x+3=-11$

24. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+cx^2+dx+1=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, $c+d$의 값을 구하면?

① 6　　② 5　　③ 4　　④ 3　　⑤ 2

해설

$\alpha = a+bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$)라 놓으면 $\alpha^2 = a^2-b^2+2abi = a-bi$ ($\because$ 계수가 실수이므로 $\alpha^2 = \overline{\alpha}$)

$\therefore\ a^2-b^2 = a,\ 2ab = -b$ 에서 $a = -\frac{1}{2},\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 두 허근 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$를 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

x^3의 계수, 상수항을 비교하면 한 실근은 -1

$x^3+cx^2+dx+1 = (x^2+x+1)(x+1) = x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore\ c=2,\ d=2$

$\therefore\ c+d=4$

25. x에 관한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 - 2a = 0$이 실수 해 α, β를 가질 때 $\alpha\beta$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M + m$은 ?

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{6}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

해설

준 방정식의 판별식

$D = a^2 - 4(a^2 - 2a) \geq 0$ ($\because$ 실수해를 가지므로)

$a^2 - 4a^2 + 8a \geq 0,\ \ -3a^2 + 8a \geq 0$

$3a^2 - 8a \leq 0,\ \ a(3a - 8) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$

또, 근과 계수와의 관계에서

$\alpha\beta = a^2 - 2a = (a - 1)^2 - 1$

$\therefore$ $\alpha\beta$의 최솟값은 $a = 1$일 때, -1, 최댓값은 $a = \frac{8}{3}$일 때, $\frac{16}{9}$

$\therefore\ m + n = \frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$