

1. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$

② $-r(x)$

③ 0

④ $r(x)$

⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$$

$$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x) \{Q(x) - 1\} - r(x)$$

여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.

2. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

3. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

4. $a^2 = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha$, $(2-a)^n = \beta$ 로 놓으면

$$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$$

$$= 4(4-3)^n = 4$$

5. $a + b + c = 7$, $a^2 + b^2 + c^2 = 21$, $abc = 8$ 일 때, $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 의 값은?

① 26

② 48

③ 84

④ 96

⑤ 112

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$49 = 21 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\therefore ab + bc + ca = 14$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)$$

$$= (14)^2 - 2(8 \times 7)$$

$$= 84$$

6. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}: -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$

7. 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = a^2 + bc$ 라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ 일 때, $[x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y]$ 의 값은?

① 10

② 22

③ 88

④ 100

⑤ 144

해설

$$\begin{aligned} & [x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y] \\ &= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= (x + y + z)^2 = 100 \end{aligned}$$

8. $10^{20} - 4$ 과 $10^{30} - 8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리

② 11자리

③ 12자리

④ 13자리

⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20} - 4 &= (10^{10})^2 - 2^2 \\ &= (10^{10} - 2)(10^{10} + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10^{30} - 8 &= (10^{10})^3 - 2^3 \\ &= (10^{10} - 2)(10^{20} + 10^{10} \times 2 + 4)\end{aligned}$$

$$\therefore \text{최대 공약수는 } 2(10^{10} - 2) = 2 \cdot 10^{10} - 4$$

$\therefore$ 11자리수

9. $\frac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a 의 값을 구하면?
(단, $x \neq -\frac{1}{2}$)

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+2} = k \text{ (일정)라 놓으면}$$

$$2x+3a = k(4x+2) \text{ 에서 } (2-4k)x + (3a-2k) = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-4k=0, 3a-2k=0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{3}$$

10. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$$

위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$$\therefore (\text{계수의 총합}) = 2^5 \times (-2)^4 = 512$$

11. 삼차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = f(2) = f(3) = 3$ 이 성립할 때, $f(0)$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -3

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라고 두면,

$$f(1) = 1 + a + b + c = 3$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 3$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 3$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a = -6, b = 11, c = -3$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$$

$$\therefore f(0) = -3$$

해설

$f(1) = f(2) = f(3) = 3$ 이므로

$$f(x) - 3 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$f(0) - 3 = -1 \times (-2) \times (-3) = -6$$

$$\therefore f(0) = -3$$

12. 다항식 $x^{51} + 30$ 을 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. 이때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + R \text{ 이라 하면}$$

$$x = -1 \text{ 을 대입하면 } R = 31$$

$$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + 31$$

$Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x = 1$ 식에 대입

$$31 = 2Q(1) + 31$$

$$\therefore Q(1) = 0$$

13. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 5

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2 p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식에 $x = 2$ 를 대입하면, $2^n(4 + 2a + b) = 0$

$$\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \cdots \textcircled{1}$$

①을 준식에 대입하면,

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) = (x-2)^2 p(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2 p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$$x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$$

다시 $x = 2$ 를 대입하면,

$$2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면,

$$b = (-2)(-3) - 4 = 2$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

14. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $x - 3$ 으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$

② $\frac{1}{3}(x^2 + 1)$

③ $\frac{1}{5}(x^2 + 1)$

④ $2x^2 - 3x + 1$

⑤ $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{2}$

해설

$$f(x) = (x^2 + 1)Q_1(x)$$

$$f(x) = (x - 3)Q_2(x) + 5$$

$$\therefore f(3) = 5$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + a(x^2 + 1)$$

($\because f(x)$ 는 $x^2 + 1$ 로 나누어 떨어지므로)

$$= (x^2 + 1)\{(x - 3)Q_3(x) + a\}$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } f(3) = 10a = 5$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{이고 나머지는 } \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

15. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ 라 하면 $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 4이므로

$$f(-1) = 4$$

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) \cdots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + a(x-1)^2 \quad (\because \text{㉠}) \end{aligned}$$

양변에 $x = -1$ 를 대입하면

$$f(-1) = 4a = 4 \therefore a = 1$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore b = -2, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 0$$

해설

$ax^2 + bx + c$ 를 구하는 것이 아니라 $a + b + c$ 를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.

$$f(x) \text{를 } (x-1)^2 \text{으로 나누어 떨어지므로 } f(1) = 0$$

$$f(x) = (x+1)(x-1)^2 Q'(x) + ax^2 + bx + c$$

양변에 $x = 1$ 를 대입하면

$$f(1) = 0 + (a + b + c) = 0$$

$$\therefore a + b + c = 0$$

16. $(2^{48} - 1)$ 은 60 과 70 사이의 어떤 두 수로 나누어 떨어진다. 이 두 수는?

① 61, 63

② 61, 65

③ 63, 65

④ 63, 67

⑤ 67, 69

해설

$$\begin{aligned} 2^{48} - 1 &= (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \\ &= 63 \cdot 65 \cdot (2^{12} + 1)(2^{24} + 1) \end{aligned}$$

따라서 $2^{48} - 1$ 은 63과 65로 나누어 떨어진다.

17. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 30

② 31

③ 32

④ 33

⑤ 34

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{위 식에 따라 } a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 4 \times (10 - 3) + 3 \times 1$$

$$= 31$$

18. 다항식 $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y + 3$ 을 두 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 두 일차식의 합으로 옳은 것은?

① $3x + 3y - 2$

② $3x - y - 4$

③ $3x + y + 4$

④ $3x + y - 2$

⑤ $3x - y + 2$

해설

$$2x^2 + (3y + 5)x - (2y^2 - 5y - 3)$$

$$= \{2x + (2y + 1)\} \{x - (y - 3)\}$$

$$\therefore (2x + 2y + 1) + (x - y + 3) = 3x + y + 4$$