1. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$ ② $4x^2 - 7x + 3$ ③ $4x^2 - 4x + 5$

④ $4x^2 - 8x + 2$ ⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.

몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$

$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

2. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a$ $\therefore\ a=-1$

양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b$ $\therefore\ b=3$

$\therefore\ 2ab=-6$

3. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,

$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠

$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면,

$m=\frac{2}{3},\ n=-\frac{13}{3}$

$\therefore\ m-n=5$

4. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x - 1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$　　② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$　　④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore \ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore \ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$= (x-1)(x+1)(x+2)$

5. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$

② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$

④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면

이 식의 우변은

$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

좌변과 계수를 비교하면

$2p=4,\ p^2+2q=-2$

$p=2,\ q=-3$에서

$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

6. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$

7. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow\ (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow\ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=2$이면,

$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

8. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$

$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$

$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i \text{ 이므로}$$

$$2-\frac{7}{3}i=a+bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$$

9. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2,\ k=10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

10. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

11. 이차방정식 $3x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{4}{3}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=8-3\times\dfrac{4}{3}\times 2=0$

12. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

13. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$　　② $-1 < k < 8$　　③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$　　⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

14. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $f(1) = f(3) = 8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값을 구하면?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로
이차함수는 $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.
$f(3) = 8$이므로 $x = 3,\ y = 8$을 대입하면
$a + 5 = 8 \quad \therefore\ a = 3$ 이므로
$f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$
$\therefore\ a + b + c = 8$

15. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1,1)$ 을 꼭지점으로 하는

아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

16. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a+2b) + (2a+3b) \\ &= (2a+4b) + (2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b+2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a+4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a) + (4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a + (4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

17. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$　② $a+b=x+y$　③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$　⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$을

간단히 정리하면

$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$

즉, $(ay-bx)^2=0$

$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수)

따라서, $ay=bx$에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

18. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

19. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$

위의 식에 $x=1$을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

20. 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 x^2-x-12로 나눈 나머지가 $14x-9$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$라 하면

x^3+ax^2+bx+3

$=(x^2-x-12)Q(x)+14x-9$

$=(x-4)(x+3)Q(x)+14x-9$

$x=4,\ x=-3$을 각각 대입하면

$16a+4b+67=47\cdots$ ㉠

$9a-3b-24=-51\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=1$

21. 복소수 $z = a + bi$(단, a, b는 실수)와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $z + \bar{z} = 4$, $z\bar{z} = 5$일 때, $a^2 - b^2$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$z + \bar{z} = 2a = 4,\ \ a = 2$

$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5\ ,\ b^2 = 1$

$\therefore\ \ a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$

22. 방정식 $(k^2-3)x+1=-k(2x-1)$에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k의 값을 k_1, 해가 존재하지 않기 위한 k의 값을 k_2라 할 때, k_1+k_2의 값을 구하면?

① -1　　② 3　　③ -3　　④ 1　　⑤ -2

해설

$(k^2+2k-3)x=k-1,\quad (k-1)(k+3)x=k-1$

$k=1$일 때, $0\cdot x=0$ (부정)

$\therefore\ k_1=1$

$k=-3$일 때, $0\cdot x=-4$ (불능)

$\therefore\ k_2=-3$

$\therefore\ k_1+k_2=-2$

23. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$을 풀 때, a를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, b를 잘못 보아 -2, 5를 얻었다. 이 때, 옳은 두 근은?

① $x = -1$ 또는 $x = -2$

② $x = -1$ 또는 $x = 2$

③ $x = 0$ 또는 $x = 2$

④ $x = 1$ 또는 $x = 2$

⑤ $x = 2$ 또는 $x = 3$

해설

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$에서

(i) 처음에는 x의 계수 a를 잘못 보고,

상수항 b를 바르게 보았으므로, 두 근 $\frac{1}{2}$, 4의 곱은 옳다.

따라서 $b = 2$

(ii) 두 번째는 상수항 b를 잘못 보고, x의 계수 a를 바르게 보았으므로

두 근 -2, 5의 합은 옳다.

따라서 $a = 3$,

$\therefore$ 주어진 이차방정식은

$x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x = 2$

25. 이차함수 $y=x^2-px+q$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나고, x축과 단 한 점에서 만나도록 $p,\ q$의 값을 정할 때, $p+q$의 값으로 가능한 수는?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$y=x^2-px+q \cdots$ ㉠의 그래프는

점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $1=1-p+q$

$\therefore\ p=q \cdots$ ㉡

또, ㉠의 그래프가 x축과 단 한 점에서 만나므로,

㉠에서 $y=0$으로 한 이차방정식

$x^2-px+q=0$은 중근을 갖는다.

따라서 판별식을 D라 하면

$D=p^2-4q=0 \cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $p^2-4p=0$

$\therefore\ p(p-4)=0 \qquad \therefore\ p=0,\ 4$

$\therefore\ p=0,\ q=0$ 또는 $p=4,\ q=4$