1. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad), k < (\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

2. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

3. 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3,4)$ 를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31\ \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1},\ 4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1\ \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore\ a=2\qquad\therefore\ a+b=2+1=3$

4. 원 $x^2 + y^2 = 8$과 직선 $y = x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < 2$　② $0 < k < 4$　③ $-4 < k < 0$

④ $-2 < k < 0$　⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore\ -4 < k < 4$$

5. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : x^2 + y^2 - 6ax - 8ay + 25a^2 - 4 = 0$ 과 외접하도록 상수 a 의 값 또는 그 범위를 정하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$C_1 : x^2 + y^2 = 9$
$C_2 : (x - 3a)^2 + (y - 4a)^2 = 4$ 이므로
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, 2$ 이고,
중심거리는 $\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$
이때, $3 + 2 = 5a$
$\therefore a = 1$

6. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 두 교점과 점$(1,\ 0)$을 지나는 원의
방정식을 바르게 구한 것은?

① $x^2+y^2-8x-y-4=0$

② $x^2+y^2-8x-4y+16=0$

③ $x^2+y^2-5x-y+16=0$

④ $x^2+y^2-5x-4y+16=0$

⑤ $x^2+y^2-5x-y+4=0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을
지나는 임의의 원
또는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)m+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$ 이다.
위 방정식이 나타내는 원이 점 $(1,0)$ 을 지나므로
$x=1$, $y=0$ 을 대입하면
$-3m+3=0$
$\therefore m=1$
$(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
$2x^2+2y^2-10x-2y+8=0$,
$x^2+y^2-5x-y+4=0$

7. 실수 a, b 와 두 원

A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

B : $(x+1)^2+(y-1)^2=3$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a+b=-3$ ② $a+b=-2$ ③ $a-b=-1$

④ $a^2+b^2=1$ ⑤ $a^2+b^2=2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(-1,\ 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$(a+1)x-(b+1)y=0 \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로

$(a+1)\times(-1)+(b+1)\times 1=0$

$\therefore a+b=-2$

8. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0,\quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$d = \dfrac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{17}{5}$

이때, $\dfrac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

9. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

10. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 을 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

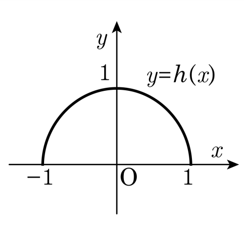
▶ 답 :

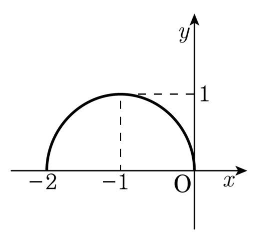
▷ 정답 : $a+b=6$

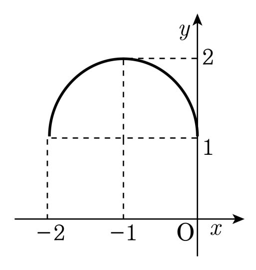
해설

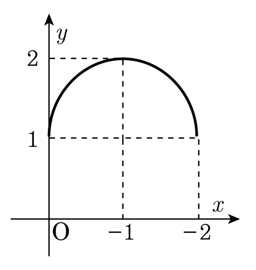
원의 중심 $(1, -2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로
5 평행 이동시키면, $(1, -2) \rightarrow \quad (3, 3)$
$\therefore a=3, b=3, a+b=6$

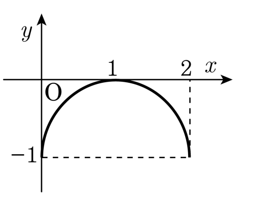
11. 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)+1$, $h(x)=g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?

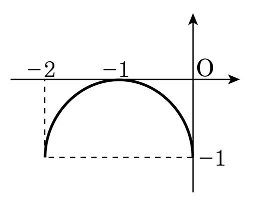


①


②


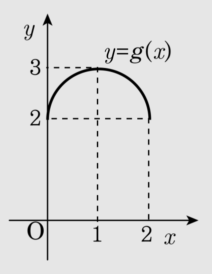
③


④


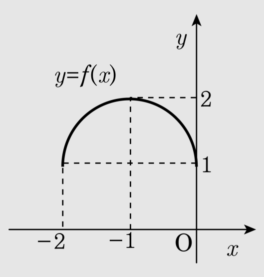
⑤


해설

$y=h(x)$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y=g(x)$ 의 그래프는 $y=h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는
$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



12. 직선 $ax+by+2=0$ 이 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하면서 움직일 때, 점 $(a,\ b)$ 가 그리는 자취의 길이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이 거리는 원의 반지름과 같다.

$\therefore \quad \dfrac{|a\times 0+b\times 0+2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

$\Rightarrow \quad a^2+b^2=4$

$\therefore$ 점 $(a,\ b)$ 가 그리는 자취길이는

$2\times 2\times \pi=4\pi$

13. 점 $A(3,-1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q_1, Q_2라고 할 때, 두 접점 Q_1, Q_2를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$꼴로 나타낼때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 34

해설

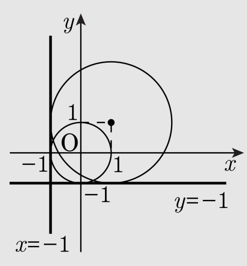
원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1,b_1)$, $Q_2(a_2,b_2)$라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x+b_1y=5$, $a_2x+b_2y=5$ 이고
두 직선은 동시에 $P(3,\ -1)$를 지나므로
$3a_1-b_1=5$, $3a_2-b_2=5$이 함께 성립한다.
이것은 $3x-y=5$ 위에 두 점
$Q_1(a_1,b_1)$, $Q_2(a_2,b_2)$ 가
동시에 있는 것을 의미하므로
Q_1, Q_2를 지나는 직선의 방정식은 $3x-y=5$이다.
따라서 $y=3x-5$에서 $m=3,\ n=-5$

14. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x=-2,\ y=-1$　② $x=1,\ y=1$
③ $x=-1,\ y=1$　④ $x=1,\ y=-1$
⑤ $x=-1,\ y=-1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각
$x=-1,\ y=-1$



15. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$ ② $a^2+b^2=9$ ③ $a^2+b^2=16$
④ $a^2+b^2=25$ ⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

16. 원점에 대하여 대칭 이동하였을 때, 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식을 <보기>에서 모두 고르면?

<보기>

㉠ $y = -x$ ㉡ $|x + y| = 1$

㉢ $x^2 + y^2 = 2(x + y)$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $y = -x$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은 $-y = -(-x)$ 이다.

㉡ $|x + y| = 1$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은 $|-x - y| = 1$ 이므로 $|x + y| = 1$

㉢ $x^2 + y^2 = 2(x + y)$ 를 원점에 대하여 대칭 이동 한 도형의 방정식은 $(-x)^2 + (-y)^2 = 2(-x - y)$ 이므로 $x^2 + y^2 = -2(x + y)$

17. 좌표평면 위의 점 A$(-2,\ 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2-4x+y^2=0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle$ACP 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

해설

점P (a, b) 는 원 $x^2-4x+y^2=0$
위를 움직이고, 원의 중심 C$(2,\ 0)$ 과
점 A$(-2,\ 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 $(a,\ b)$,
$\triangle$ACP 의 넓이를 n 이라 하면,

$\triangle\mathrm{ACP}=\frac{1}{2}\times 4\times|b|=n$ (n 은 자연수, $|b|\le 2$)

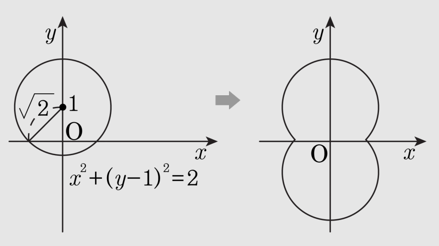
$\therefore |b|=\frac{n}{2}$

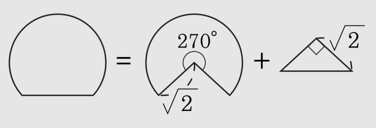
$n=1,\ \ 2,\ \ 3$ 일 때, 점P 는 각각 4 개씩이고,
$n=4$ 일 때, 점 P 는 2 개
따라서 $\triangle$ACP 의 넓이가 자연수가 되게 하는
점 P 의 개수는 총 14 (개)

18. 원 $x^2+(y-1)^2=2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\pi+1$　② $\pi+2$　③ $3\pi+1$
④ $3\pi+2$　⑤ $3\pi+4$

해설





(구하는 넓이)

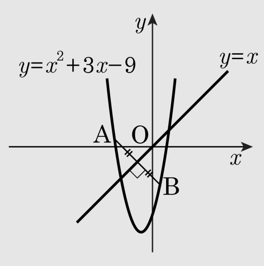
$= \left\{\pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}\right\} \times 2$

$= 3\pi + 2$

19. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설



A 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 두면
B 의 좌표는 $(b,\ a)$ 가 된다.
두 점은 포물선 위의 점이므로
$a = b^2 + 3b - 9,\ b = a^2 + 3a - 9$ 가
성립한다.
두 식을 변변 빼서 정리하면
$(a - b)\ (a + b + 4) = 0$
$\therefore\ a + b + 4 = 0\ (\because a \neq b)$
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면
$a^2 + 4a - 5 = 0,\ (a + 5)(a - 1) = 0$
$a = 1$ 또는 -5, $b = -5$ 또는 1 이므로
$\mathrm{A}(-5,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -5)$ 가 된다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

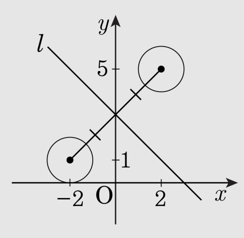
20. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

① $y=-2x+3$　② $y=-x+2$　③ $y=x+3$

④ $y=-x+3$　⑤ $y=2x-1$

해설

두 원의 중심 $(-2,\ 1)$, $(2,\ 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.



따라서 직선l 의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하면

ⅰ) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로

$a=-1$

ⅱ) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$ 에서 $(0,3)$ 이므로 $b=3$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+3$ 이다.