

1. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$

② $-2x+1$

③ 3

④ -3

⑤ $x+1$

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 을 만족하려면,}$$

$a < 0, b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0, x-2 < 0, -1 \leq x < 2, x \neq -1, x \neq 2$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1 - x+2 = 3$$

2. 방정식 $|x - 1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때

$|x - 1| = x - 1$ 이므로, $x - 1 = 2$

$\therefore x = 3$

ii) $x < 1$ 일 때

$|x - 1| = -x + 1$ 이므로, $-x + 1 = 2$

$\therefore x = -1$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

3. 이차방정식 $x^2 + (k - 4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
 $D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
 $D = (k - 4)^2 - 4(k - 1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
 $(k - 2)(k - 10) = 0$
따라서, $k = 2, k = 10$ 이므로 k 의 값은 12이다.

4. 이차방정식 $x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a \geq 1$

③ $-1 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 1 - (2 - a) > 0$$

$$1 - 2 + a > 0$$

$$\therefore a > 1$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

10. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수)의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켈레근 $1 - i$ 도 식의 근.
 $(1 + i) + (1 - i) = -a$
 $\therefore a = -2$

11. $\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 15

② 25

③ 35

④ 45

⑤ 55

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} \\ &= 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{2} + \sqrt{3}i \\ &= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i \\ &= a + bi \\ &\text{따라서, } a = -3\sqrt{2}, b = 3\sqrt{3} \\ &\therefore a^2 + b^2 = 18 + 27 = 45 \end{aligned}$$

12. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z \cdot \bar{z} = 9$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{9}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

- ① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$$z \cdot \bar{z} = 9 \text{ 이므로 } \bar{z} = \frac{9}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{9}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

13. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $i^{3m} + i^{3n+1}$ 이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

i) $i^{3m} = (-i)^m \Rightarrow -i, -1, i, 1$
ii) $i^{3n+1} = (-i)^n \times i \Rightarrow 1, -i, -1, i$
 $\therefore$ i+ii를 더해서 나올 수 있는 수는
(0, 2, $1-i$, $1+i$, $-1-i$, $-1+i$, $2i$, $-2i$, -2) 의 9가지 이다.

14. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

15. $|x-2|+|x-3|=1$ 을 만족하는 실수 x 의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$ 에서
i) $x < 2$ 일 때,
 $-(x-2)-(x-3)=1$
 $\therefore x=2$ (성립하지 않음)
ii) $2 \leq x < 3$ 일 때,
 $(x-2)-(x-3)=1$
 $\therefore 0 \cdot x=0$ (모든 실수)
iii) $x \geq 3$ 일 때,
 $(x-2)+(x-3)=1$
 $\therefore x=3$

16. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 6

해설

$|x-1|$ 이 존재하므로 절댓값의 부호에 따라서

$x-1 \geq 0$, $x-1 < 0$ 으로 구간을 나누면

i) $x \geq 0$ 일 때, $|x-1| = x-1$

$$(x-1)^2 + (x-1) - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \quad \therefore x = -2, 3$$

하지만 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

ii) $x < 0$ 일 때, $|x-1| = -(x-1)$

$$(x-1)^2 - (x-1) - 6 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \quad \therefore x = -1, 4$$

하지만 $x < 0$ 이므로 $x = -1$

$\therefore$ 두 근의 합은 $3 + (-1) = 2$

17. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

18. $1 < x < 3$ 인 x 에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$ 의 해를 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2

② $1 + \sqrt{2}$

③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x] = 1$

준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 만족하는 해가 없다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$

준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$

그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 만족하는 해는

$x = 1 + \sqrt{3}$

19. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 \pm i$ 를 대입하여 정리하면
 $1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0$ 과
 $a + b + (a + 2)i = 0$ 이다.
위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서
 $a = -2, b = 2$ 이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켈레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$
근과 계수의 관계에서
 $-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$
 $b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$

20. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ 판별식은 $b^2 - 4ac$ 이다.
- ㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.
- ㉢ $a < 0, c < 0$ 이면 허근만 갖는다.
- ㉣ $a > 0, c < 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.
- ㉥ 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $q - pi$ 이다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)
- ㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)
- ㉢ $b^2 - 4ac$ 에서 $ac > 0$ 이다.
하지만 $b^2 < 4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)
- ㉣ 판별식 $b^2 - 4ac$ 에서 $ac < 0$ 이므로 $b^2 - 4ac > 0$ (참)
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)
- ㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

21. x 에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이 허근을 가질 때,
실수 k 의 값의 범위는?

- ① $k < 0$
- ② $k > 0$
- ③ $0 < k < \frac{1}{4}$
- ④ $k \leq 0$
- ⑤ $k \geq 0$

해설

$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이
허근을 가져야 하므로
 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k + 1) = 0$
 $D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k + 1) < 0$
 $= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$
 $\therefore k > 0$

22. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + 2(a-1)x - (a+1) = 0$ 은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a 는 실수)

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$$ax^2 + 2(a-1)x - (a+1) = 0$$

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 + a(a+1)$$

$$= a^2 - 2a + 1 + a^2 + a$$

$$= 2a^2 - a + 1 = 2\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) + 1$$

$$= 2\left(a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}\right) + 1 - \frac{1}{8}$$

$$= 2\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

23. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, a, b, c 는 서로 다른 양의 실수이다.)

- ① 서로 다른 두 허근
- ② 서로 다른 두 실근
- ③ 서로 같은 두 실근
- ④ 서로 다른 두 허근
- ⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.
(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

24. a 가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x 에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 실근을 가진다.
 - ② $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
 - ③ $f(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 허근을 가진다.
 - ④ $g(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
 - ⑤ $g(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1,$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$$

모든 실수 a 에 대하여

$$2a+1 > 2a-1,$$

즉, $D_1 > D_2$ 이므로 $D_1 < 0$ 이면 $D_2 < 0$

25. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $mx^2+2(a-b-m)x-a+m+1=0$ 이 m 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 a, b 의 값은?
- ① $a = -1, b = 0$

② $a = -1, b = -1$

③ $a = 0, b = 1$

④ $a = 1, b = 1$

⑤ $a = 1, b = 2$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 할 때,
 $m \neq 0$ 이고, 중근을 가지려면
 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a - b - m)^2 - m(-a + m + 1)$$
$$a^2 + b^2 - 2ab + 2bm - am - m = 0$$

이 때, 이 등식이 m 의 값에 관계없이
항상 성립해야 하므로
 m 에 대하여 정리하면

$$(2b - a - 1)m + (a - b)^2 = 0$$
$$2b - a - 1 = 0, (a - b)^2 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면
 $a = 1, b = 1$

26. 이차방정식 $x^2 + 6x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ 의 값을 다음과 같이 구하였다. 아래 풀이 과정에서 처음으로 잘못된 곳은?

근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \beta = -6, \alpha\beta = 6 \quad \cdots \text{㉠}$
 $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$
 $= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \cdots \text{㉡}$
 $= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdots \text{㉢}$
 $= -\sqrt{6} \cdots \text{㉣}$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 잘못된 곳이 없다.

해설

$x^2 + 6x + 6 = 0$ 의 두 근은 $x = -3 \pm \sqrt{3}$ 에서
 $\alpha = -3 + \sqrt{3} < 0, \beta = -3 - \sqrt{3} < 0$
 $\therefore \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$
 $\therefore \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\beta}{-\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{\alpha}{-\sqrt{\alpha\beta}}$
 $= -\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$
따라서 처음으로 잘못된 부분은 ㉢이다.

27. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}$ 을 두 근으로 갖고 계수가 정수인 이차방정식은?

- ① $4x^2 - 3x + 4 = 0$ ② $3x^2 - 4x + 4 = 0$
 ③ $3x^2 + 4x - 4 = 0$ ④ $4x^2 + 3x - 4 = 0$
 ⑤ $3x^2 - 3x + 4 = 0$

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \quad \dots \text{ 두근의합}$$

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{3} \quad \dots \text{ 두근의곱}$$

$$\therefore x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

28. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2 + 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x + 1 + 2i)$

③ $x^2 + 4 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $2x^2 + 4x - 5 = \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1 = 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$

③ $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

④ $2x^2 + 4x - 5$

$= 2\left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right)\left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1$

$= 3\left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

29. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로

근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

30. 다음 x 의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m 의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

- ① -4
- ② -2
- ③ 0
- ④ 2
- ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
 $\alpha + \beta = 0, \alpha\beta < 0$
준식을 x 에 관해서 정리하면,
 $3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + m^2 + 3m - 18 = 0$
따라서, $\alpha + \beta = \frac{-(m^2 - 3m - 10)}{3} = 0,$
즉 $m^2 - 3m - 10 = 0$
 $(m - 5)(m + 2) = 0 \quad \therefore m = 5, -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\alpha\beta = \frac{m^2 + 3m - 18}{3} < 0, m^2 + 3m - 18 < 0$
 $(m - 3)(m + 6) < 0 \quad \therefore -6 < m < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통범위에 의해 $m = -2$

31. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3 + 3x^2i - 3x - i)$$

$$= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

32. x 에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2 + (3+2ai)x + (2a+3i) = 0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$$(ax^2 + 3x + 2a) + (-ax^2 + 2ax + 3)i = 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$ax^2 + 3x + 2a = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$-ax^2 + 2ax + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}}$ 하면

$$(2a+3)x + (2a+3) = 0, (2a+3)(x+1) = 0$$

$$2a+3 = 0 \text{ 또는 } x+1 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -1$$

i) $a = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{식에서 } -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 3 = 0, x^2 - 2x + 2 = 0$$

이므로 허근을 가진다. $\therefore a \neq -\frac{3}{2}$

ii) $x = -1$ 일 때 $\textcircled{\text{㉠}}$ 에 대입하면,

$$a - 3 + 2a = 0, 3a = 3 \quad \therefore a = 1$$

33. 복소수들 사이의 연산 $*$ 가 다음과 같다고 하자.
 $\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$
이 때, $(1 + 2i) * z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 는?(단, $i = \sqrt{-1}$)
- ① $1 + i$

② $1 - i$

③

$-1 + i$

④ $-1 - i$

⑤ i

해설

$$\begin{aligned} z &= a + bi \text{라 하면} \\ (1 + 2i) * z &= (1 + 2i) + (a + bi) + (1 + 2i)(a + bi)i \\ &= (-a - b + 1) + (a - b + 2)i = 1 \\ -a - b + 1 &= 1, \quad a - b + 2 = 0 \\ a &= -1, \quad b = 1 \\ \therefore z &= -1 + i \end{aligned}$$

34. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

- ㉠ $f(z) \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

- ㉠ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
 $f(z) = z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
 $= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
 $\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z} \bar{w}$
 $= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

35. 복소수 $z = a + bi$ (a, b : 실수)에 대하여 $\langle z \rangle = b + ai$ 로 나타낸다.

$z = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 \langle z \rangle^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$

② $4 + 3i$

③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$

⑤ $4 + 5i$

해설

$$z \langle z \rangle = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

$$z = \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로}$$

$$z \langle z \rangle = \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned} \therefore 5z^5 \langle z \rangle^4 &= 5z(z \langle z \rangle)^4 \\ &= 5 \left(\frac{4+3i}{5} \right) (i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

36. $x = \frac{1+3i}{1+i}$ 일 때, $x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ 의 값은?

① $1+i$

② $1-i$

③ $-1+i$

④ $-1-i$

⑤ 1

해설

$$x = 2 + i$$

$$(x-2)^2 = i^2 = -1$$

$$\therefore x^2 - 4x = -5$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x(x^2 - 4x) + 4x + 1 \\ &= -5x + 4x + 1 \\ &= -x + 1 \\ &= -1 - i\end{aligned}$$

37. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

- ① $\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1 + \sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0, y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 의 양변을 y^2 으로 나누면

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$$\frac{x}{y} = t \text{ 라 하면 } (t > 0)$$

$$2t^2 + t - 2 = 0$$

근의 공식에 대입하면

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\therefore t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad (t > 0) \quad \frac{x}{y} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

38. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

조건에서

$$1 + 3a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4a + b - c = 0$$

$$\therefore b - c = -4a$$

$$\therefore 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a - 1)^2 - 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

39. 방정식 $x^2+x+2=0$ 의 한 해근을 ω 라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega)=3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$ 의 한 해근이 ω 이므로
 $\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \omega^2=-\omega-2$
 $f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$
 $= (b-a)\omega+(12-2a)$
 $f(\omega)=3\omega$ 이므로
 $(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$
 $b-a=3, 12-2a=0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$
 $\therefore a=6, b=9$

40. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - k(k+3)x + k^2 - 1 = 0$ 의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k 의 조건은?

- ① $-1 < k \leq 1$ ② $-1 < k < 1$ ③ $0 < k \leq 2$
④ $-1 \leq k \leq 0$ ⑤ $-1 \leq k \leq 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β 라 하자.
(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,
 $\alpha\beta = k^2 - 1 < 0, (k+1)(k-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1$
(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,
 $\alpha + \beta = k(k+3) > 0 \quad \therefore k > 0, k < -3$
 $\alpha\beta = k^2 - 1 = 0 \quad \therefore k = \pm 1$
따라서, $k = 1$
그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1 < k \leq 1$