

1. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = 2$$

$$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$$

2. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

3. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\therefore a+b+c = 4$$

4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

5. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ 가 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 로 인수분해될 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

6. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a = 1999$ 라 하면

$$1998 \times 1999 + 1 = (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1999^3 + 1}{1998 \times 1999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 2000\end{aligned}$$

7. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9개

② 12개

③ 16개

④ 24개

⑤ 32개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$$\therefore (3+1)(3+1) = 16$$

8. 100개의 다항식 $x^2 - x - 1, x^2 - x - 2, \dots, x^2 - x - 100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개

② 7개

③ 9개

④ 11개

⑤ 13개

해설

$x^2 - x - n = (x + a)(x - b)$ (a, b 는 자연수)라 하면
 $b = a + 1, ab = n$ ($1 \leq n \leq 100$)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

9. 다항식 $(x+3)^4 - 6(x+3)^2 + 8$ 을 인수분해 하면 $(x+1)(x+5)g(x)$ 일 때, $g(-1)g(1)$ 의 값으로 옳은 것은?

- ① 28 ② 26 ③ 24 ④ 14 ⑤ 12

해설

$A = (x+3)^2$ 로 치환하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 8 &= (A-4)(A-2) \\ &= (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 7) \\ &= (x+1)(x+5)(x^2 + 6x + 7) \\ &= (x+1)(x+5)g(x) \end{aligned}$$

따라서, $g(x) = x^2 + 6x + 7$

$$\therefore g(-1) \times g(1) = 2 \times 14 = 28$$

10. $x^4 - 8x^2 - 9$ 를 x 에 대한 일차식만의 곱으로 인수분해할 때, 계수는 다음 중 어떤 수라 할 수 있는가?

① 정수

② 유리수

③ 무리수

④ 실수

⑤ 복소수

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 8x^2 - 9 &= (x^2 - 9)(x^2 + 1) \\&= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 1) \\&= (x + 3)(x - 3)(x + i)(x - i)\end{aligned}$$

$\therefore$ 복소수

11. 다항식 $x^4 + x^2y^2 + 25y^4$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + mxy + 5y^2)(x^2 + nxy + 5y^2)$ 가 되었다. 이 때 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값을 구하면?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 - 9x^2y^2 \\&= (x^2 + 5y^2)^2 - (3xy)^2 \\&= (x^2 + 5y^2 - 3xy)(x^2 + 5y^2 + 3xy)\end{aligned}$$

$$\therefore m + n = 0$$

12. $x^4 - 23x^2y^2 + y^4$ 을 인수분해 하면?

① $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

② $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$

③ $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$

④ $(x^2 + 4xy + y^2)(x^2 - 4xy + y^2)$

⑤ $(x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 25x^2y^2 \\&= (x^2 + y^2)^2 - (5xy)^2 \\&= (x^2 + y^2 + 5xy)(x^2 + y^2 - 5xy) \\&= (x^2 + 5xy + y^2)(x^2 - 5xy + y^2)\end{aligned}$$

13. 다음 <보기> 중 다항식 $x^4 - 7x^2 + 9$ 을 인수분해 할 때, 그 인수로 알맞은 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $x^2 - 1$

㉡ $x^2 - x - 1$

㉢ $x^2 - x - 3$

㉣ $x^2 + x - 3$

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 7x^2 + 9 &= x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 \\&= (x^2 - 3)^2 - x^2 \\&= (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 3) \\ \therefore \text{인수} &: (x^2 - x - 3), (x^2 + x - 3)\end{aligned}$$

14. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

㉠ $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

㉡ $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

㉢ $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = x^4 + x + 1$

㉤ $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

㉥ $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉤

⑤ ㉥

해설

㉢ $x + 1 = A$ 로 치환하여 전개하면

$$(x^2 + A)(x^2 - A) = x^4 - A^2 = x^4 - x^2 - 2x - 1$$

15. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$

② $2x - y + 2$

③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$

⑤ $x - 2y - 1$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$$

$$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$$

$$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$$

$$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$$

16. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\&= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\&= (c-b)(a-b)(a-c) \\&= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

17. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) \\&= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} \\&= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2) \\&= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

18. 다항식 $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 - 2x + 8$ 가 $x-1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 k 의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$

② $x+1$

③ $x-2$

④ $x+2$

⑤ $x+4$

해설

$$P(x) = (x-1)Q(x)$$

$$\therefore P(1) = 1 + 2 + k - 2 + 8 = 0$$

$$\therefore k = -9$$

$$\therefore P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$$

$$= (x-1)(x-2)(x+1)(x+4)$$

19. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 을 바르게 인수분해 한 것을 찾으려면?

① $(x^2 + 1)(x + 3)(x + 1)$

② $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$

③ $(x^2 + 1)(x - 3)(x - 1)$

④ $(x^2 - 3)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

해설

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 라 하면

$f(1) = 0, f(3) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x - 1, x + 3$ 로 나누어떨어진다.

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)\end{aligned}$$

20. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ 을 인수분해 했을 때 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x + 2$

④ $(x - 1)^2$

⑤ $(x + 1)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	1	-3	-1	2
		1	2	-1	-2
1	1	2	-1	-2	0
		1	3	2	
-1	1	3	2	0	
		-1	-2		
-2	1	2	0		
		-2			
	1	0			

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$$

21. a, b, c 가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b) = bc(b+c) + ca(c-a)$ 인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a = b$ 인 이등변 삼각형

② $a = c$ 인 이등변 삼각형

③ 정삼각형

④ a 가 빗변인 직각 삼각형

⑤ b 가 빗변인 직각 삼각형

해설

$$ab(a+b) = bc(b+c) + ca(c-a)$$

$$a^2b + ab^2 - bc(b+c) - ac^2 + a^2c = 0$$

$$(b+c)a^2 + (b^2 - c^2)a - bc(b+c) = 0$$

$$(b+c) \{a^2 + (b-c)a - bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a-c) = 0$$

22. $\frac{2012^3 + 8}{2012 \times 2010 + 4}$ 의 값은?

① 2010

② 2011

③ 2012

④ 2013

⑤ 2014

해설

$a = 2012$ 라 치환하면,

$$\begin{aligned}\frac{2012^3 + 8}{2012 \times 2010 + 4} &= \frac{a^3 + 2^3}{a \times (a - 2) + 4} \\ &= \frac{(a + 2)(a^2 - 2a + 4)}{a^2 - 2a + 4} \\ &= 2012 + 2 \\ &= 2014\end{aligned}$$

23. $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ 의 값을 구하면?

① 51

② 52

③ 53

④ 54

⑤ 55

해설

$$\begin{aligned} & (10 - 9)(10 + 9) + (8 - 7)(8 + 7) + (6 - 5)(6 + 5) \\ & \quad + (4 - 3)(4 + 3) + (2 - 1)(2 + 1) \\ & = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55 \end{aligned}$$

24. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1007}{1006}$

해설

$$a = \frac{(2012 + 1)(2012^2 - 2012 + 1)}{(2012^2 - 2012 + 1)}$$

= 2013 이므로

$$\therefore \frac{a+1}{a-1} = \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006}$$

25. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$ 일 때, abc 의 값은?

① $-\frac{5}{3}$

② 0

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 1

해설

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 이므로}$$

$$5 = 1 - 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 이므로}$$

$$2 - 3abc = 1 \cdot (5 + 2)$$

$$\therefore abc = -\frac{5}{3}$$

26. 가로 길이가 x cm, 세로 길이가 y cm, 높이가 z cm 인 직육면체에서 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

① 45 cm^2

② 50 cm^2

③ 54 cm^2

④ 58 cm^2

⑤ 60 cm^2

해설

공식 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy + yz + zx = 27$
겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이므로 54

27. $a + b - 2c = 1$, $a - b + 3c = 3$ 일 때, 다음 중 $a + ab + c^2$ 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a - 8)(a - 2)$

② $(a + 8)(a - 2)$

③ $-(a - 8)(a - 2)$

④ $-(a - 8)(a + 2)$

⑤ $-(a + 8)(a - 2)$

해설

$$a + b - 2c = 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$a - b + 3c = 3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} \text{에서 } 2a + c = 4$$

$$\therefore c = -2a + 4 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } b = -5 + 9$$

$$\begin{aligned} \therefore a + ab + c^2 &= a + a(-5a + 9) + (-2a + 4)^2 \\ &= -a^2 - 6a + 16 \\ &= -(a^2 + 6a - 16) \\ &= -(a + 8)(a - 2) \end{aligned}$$

28. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43 개

29. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 을 바르게 인수분해 한 것을 찾으려면?

① $(x^2 + 1)(x + 3)(x + 1)$

② $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$

③ $(x^2 + 1)(x - 3)(x - 1)$

④ $(x^2 - 3)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ &= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x \\ &= (x^2 - 3)(x^2 + 1) + 2x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

30. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\&= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2 \\&= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2 \\&= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2 \\&= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18, g = -4$

$$\therefore pq = (-18) \times (-4) = 72$$

31. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd)$ 를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a + b - c - d)(a - b + c + d)$

② $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$

③ $(a + b + c - d)(a - b + c + d)$

④ $(a - b + c - d)(a - b + c + d)$

⑤ $(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd) \\ &= (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) \\ &= (a + c)^2 - (b - d)^2 \\ &= (a + b + c - d)(a - b + c + d) \end{aligned}$$

32. $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$ 를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $ab + bc + ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고

차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3 \\ &= (b^2 - c^2)a^3 - (b^3 - c^3)a^2 + b^2c^2(b - c) \\ &= (b - c)\{(b + c)a^3 - (b^2 + bc + c^2)a^2 + b^2c^2\} \\ &= (b - c)\{(c^2 - a^2)b^2 - a^2(c - a)b - a^2c(c - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(c + a)b^2 - a^2b - a^2c\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(b^2 - a^2)c + ab(b - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)(b - a)\{(b + a)c + ab\} \\ &= -(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

33. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$a + b + c = 0$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이다.

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c)}{abc} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{-3abc}{abc} = -3 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{b+c}{a} \\ &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \quad (\because a+b+c=0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

34. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a = b$ 인 이등변삼각형

② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$$a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$$

$$a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$a = -b \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2$$

$$a, b, c \text{ 모두 양수이므로, } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ \text{인 직각삼각형}$$

35. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여 $(a^2 + b^2)c + (a + b)c^2 = (a + b)(a^2 + b^2) + c^3$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b = c$ 인 이등변 삼각형

② a 가 빗변인 직각삼각형

③ $a = c$ 인 이등변 삼각형

④ c 가 빗변인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 c 에 관한 내림차순으로 정리하면

$$c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2) \text{에서}$$

$$c^2\{c - (a + b)\} - (a^2 + b^2)\{c - (a + b)\}$$

$$= \{c - (a + b)\}\{c^2 - (a^2 + b^2)\}$$

$$= (c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

a, b, c 는 삼각형의 세변이므로

$$c - a - b \neq 0 \text{이고 } c^2 - a^2 - b^2 = 0$$

즉 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 c 가 빗변인 직각 삼각형이다.

36. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$ 의 양의 약수의 개수는?

① 20 개

② 40 개

③ 60 개

④ 80 개

⑤ 100 개

해설

주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,

주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면

$$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$$

$$= 5(29 + 1)^3$$

$$= 5 \cdot 30^3$$

$$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$$

$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$$

따라서 N 의 양의 약수의 개수는

$$(3 + 1)(3 + 1)(4 + 1) = 80$$

37. 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = a^2 + bc$ 라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ 일 때, $[x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y]$ 의 값은?

① 10

② 22

③ 88

④ 100

⑤ 144

해설

$$\begin{aligned} & [x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y] \\ &= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= (x + y + z)^2 = 100 \end{aligned}$$

38. 다음 식 $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a + b$

② $b + c$

③ $c + a$

④ $b - a$

⑤ $-b - c$

해설

전개하여 a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\ &= (b + c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + bc(b + c) \\ &= (b + c) \{a^2 + (b + c)a + bc\} \\ &= (b + c)(a + b)(a + c) \\ &\therefore \text{④ } b - a \text{는 인수가 아니다} \end{aligned}$$

39. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
 &= 0 (\because a+b+c=0) \\
 &\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \\
 &\therefore (\text{준식}) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left(\frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\
 &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0
 \end{aligned}$$

40. 세 변의 길이가 x, y, z 인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① $z = x$ 인 이등변삼각형, 또는 y 가 빗변인 직각삼각형

② $y = z$ 인 이등변삼각형, 또는 x 가 빗변인 직각삼각형

③ x 가 빗변인 직각삼각형

④ y 가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x = y$ 인 이등변 삼각형, 또는 z 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & (x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)(x + y)^2(x^2 + y^2) - 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)\{(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) - 2(x^2 + xy + y^2)z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 - 2xyz^2 - 2y^2z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)\{(x^2 + y^2 - z^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy) = 0 \\
 &\therefore x = y \text{인 이등변 삼각형 또는 } z \text{가 빗변인 직각 삼각형} \\
 &(\because x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 \text{에서 삼각형의 변인 } x, y, z \text{는 } x + y \neq z)
 \end{aligned}$$