

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 합은 2이다.
- ② 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 차는 4이다.
- ③ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근의 곱은 5이다.
- ④ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ⑤ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 -6 이다.

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서

두근의 합 : $-\frac{b}{a}$

두근의 곱 : $\frac{c}{a}$

두근의 차 : $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차) = $4i$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

3. 이차방정식 $3x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha - \beta|$ 의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

해설

$3x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

한편, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2$
 $= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$|\alpha - \beta|^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{40}{9}$$

따라서, $|\alpha - \beta| = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

4. $x^2 - 4kx + (5 - k^2) = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} D/4 &= 4k^2 - (5 - k^2) \geq 0 \\ 4k^2 - 5 + k^2 &\geq 0, 5k^2 \geq 5, \therefore k^2 \geq 1 \\ \alpha + \beta &= 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2 \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \\ 18k^2 &\geq 18, 18k^2 - 10 &\geq 18 - 10 \\ \alpha^2 + \beta^2 &\geq 8, \therefore (\text{최솟값}) = 8 \end{aligned}$$

5. 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{22}{25}$ ④ $\frac{22}{5}$ ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 5$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{8 - 15 \times 2}{25} = -\frac{22}{25}$$

6. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\alpha\beta < 0 \text{ 이므로 } \frac{\beta}{\alpha} < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 &= \frac{\beta}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 \left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}\right) \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

해설

7. $x^2 - 2kx + 1 = 0$ 의 해를 α, β 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 = 2$ 가 되도록 하는 k 의 값들의 합을 구하면?

- ① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 1$ 이므로
 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$ 에서
 $(2k)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2k = 2$
 $4k^3 - 3k - 1 = 0, (k - 1)(4k^2 + 4k + 1) = 0,$
 $(k - 1)(2k + 1)^2 = 0$
 $\therefore k = 1, -\frac{1}{2}$
 $\therefore k$ 값들의 합은 $\frac{1}{2}$

8. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자. α^2, β^2 이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q - 1) = 0$ 의 두 근일 때, p 의 값은?
- ① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3
④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\alpha^2 + \beta^2 = 3p, \alpha^2\beta^2 = 4(q - 1) \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서
 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $\therefore 3p = p^2 - 2q \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$
 $\therefore 4(q - 1) = q^2 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉣}$ 에서 $q^2 - 4q + 4 = 0, (q - 2)^2 = 0$
 $\therefore q = 2$
 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하여 정리하면,
 $p^2 - 3p - 4 = 0, (p + 1)(p - 4) = 0$
 $\therefore p = -1, 4$

9. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과계수와 관계로부터
 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -1$

2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (2 - 1)x + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

10. 이차방정식 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 이차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(\alpha) = 3, f(\beta) = 3, f(1) = -2$ 를 만족한다. 이차방정식 $f(x) = 0$ 를 구하면?

① $x^2 - 2x - 4 = 0$

② $x^2 - 4x - 1 = 0$

③ $x^2 - x - 4 = 0$

④ $x^2 - x + 4 = 0$

⑤ $x^2 - 2x - 1 = 0$

해설

$x^2 - 2x - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$ax^2 + bx + c = 3$ 에서 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$

$$\therefore -\frac{b}{a} = \alpha + \beta = 2$$

$$\text{또, } \frac{c-3}{a} = \alpha\beta = -4$$

$f(1) = a + b + c = -2$ 이므로

$a = -b - c - 2, b = -2a$ 에서

$$b = -2(-b - c - 2) = 2b + 2c + 4$$

$$\therefore b + 2c + 4 = 0$$

$c - 3 = -4a$ 에서

$$c = -4(-b - c - 2) + 3 = 4b + 4c + 11$$

연립하여 풀면 $c = -1, b = -2, a = 1$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 1$$

11. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

12. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 b 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, c 를 잘못 보아 $-1, 4$ 의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b 를 잘못 본 경우
 a 와 c 는 옳으므로 두 근의 곱은
 $\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 2a$

(ii) c 를 잘못 본 경우
 a 와 b 는 옳으므로 두 근의 합은
 $-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -3a$

(i), (ii)에서 주어진 방정식은
 $ax^2 - 3ax + 2a = 0$
 $a \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

13. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합: $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore a = -2$
두 근의 곱: $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore b = 2$
 $\therefore a + b = -2 + 2 = 0$

14. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

- (가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

- ① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$
$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

15. 삼차방정식 $x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = 6, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7, \alpha\beta\gamma = 5$$

$$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$

해설

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x - 5 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - 6 - 7 - 5 = -17$$