1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 합은 2이다.

② 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 차는 4이다.

③ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근의 곱은 5이다.

④ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은 -6이다.

해설

$ax^2+bx+c=0$에서

두근의 합 : $-\dfrac{b}{a}$

두근의 곱 : $\dfrac{c}{a}$

두근의 차 : $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차)$=4i$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a = 2 + 3$, $a = -5$

$b = 2 \cdot 3 = 6$

$\therefore\ -5x^2 + 6x + 3 = 0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

3. 이차방정식 $3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$
④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

해설

$3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{3}$, $\alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$

한편, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$$|\alpha-\beta|^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{40}{9}$$

따라서, $|\alpha-\beta|=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

4. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$D/4=4k^2-(5-k^2)\geq 0$$
$$4k^2-5+k^2\geq 0,\ 5k^2\geq 5,\ \therefore k^2\geq 1$$
$$\alpha+\beta=4k,\quad \alpha\beta=5-k^2$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2 &=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &=16k^2-10+2k^2\\ &=18k^2-10\end{aligned}$$
$$18k^2\geq 18,\ 18k^2-10\geq 18-10$$
$$\alpha^2+\beta^2\geq 8,\ \therefore (\text{최솟값})=8$$

5. 이차방정식 $x^2-2x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$의 값을 구하면?

① 2 ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $-\dfrac{22}{25}$ ④ $\dfrac{22}{5}$ ⑤ -2

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2, \quad \alpha\beta=5$

$$\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{8-15\times 2}{25}=-\frac{22}{25}$$

6. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\dfrac{\beta}{\alpha}<0,\ \dfrac{\alpha}{\beta}<0$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$$

$$=-4$$

해설

7. $x^2 - 2kx + 1 = 0$의 해를 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 = 2$가 되도록 하는 k의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 1$이므로

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$에서

$(2k)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2k = 2$

$4k^3 - 3k - 1 = 0,\ (k-1)(4k^2 + 4k + 1) = 0,$

$(k-1)(2k+1)^2 = 0$

$\therefore\ k = 1,\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ k$값들의 합은 $\frac{1}{2}$

8. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3

④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$

$\therefore\ q = 2$

㉢에 대입하여 정리하면,

$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$

$\therefore\ p = -1,\ 4$

9. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과계수와의 관계로부터
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$
2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$
$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

10. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$ ② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$ ④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2$, $b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1$, $b=-2$, $a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

11. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면

$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.

$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$

$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$ ㉠

또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.

$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$ ㉡

$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로

처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$

$\therefore\ x=-5$ 또는 $-7,\quad x=5$ 또는 7

따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

12. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(ⅰ) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{c}{a}\quad \therefore\ c=2a$
(ⅱ) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$-1+4=3=-\frac{b}{a}\quad \therefore\ b=-3a$
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식은
$ax^2-3ax+2a=0$
$a\neq 0$이므로 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$
따라서 근의 합은 3이다.

13. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1-i$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1+i$ 이므로

두 근의 합 : $(1+i)+(1-i)=-a \quad \therefore\ a=-2$

두 근의 곱 : $(1+i)(1-i)=b \quad \therefore\ b=2$

$\therefore\ a+b=-2+2=0$

14. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

15. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15　② 16　③ -16　④ 17　⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$

$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$