

1. 다음 보기에 주어진 수를 x 라 할 때, \sqrt{x} 가 허수가 되는 x 의 개수는?

$$-2, \frac{1}{3}, 0, -3.5, 4, -\frac{2}{5}$$

- ① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 7 개 ⑤ 9 개

해설

\sqrt{x} 가 허수가 되는 $x = -2, -3.5, -\frac{2}{5}$ 의 3개이다.

2. 집합 $A = \{z \mid z = p(1-i) + q(1+i)\}$ 에 대하여 다음 중 집합 A 의 원소인 것은? (단, p, q 는 양의 실수)

① $-4-2i$

② $-3+i$

③ $-2+i$

④ $2+3i$

⑤ $5-2i$

해설

$$z = p(1-i) + q(1+i) \text{ 에서 } z = p+q + (-p+q)i$$

① $p+q = -4, -p+q = -2$ 이므로

$$p = -1, q = -3$$

$$\therefore -4-2i \notin A$$

② $p+q = -3, -p+q = 1$ 이므로

$$p = -2, q = -1$$

$$\therefore -3+i \notin A$$

③ $p+q = -2, -p+q = 1$ 이므로

$$p = -\frac{3}{2}, q = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore -2+i \notin A$$

④ $p+q = 2, -p+q = 3$ 이므로

$$p = -\frac{1}{2}, q = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2+3i \notin A$$

⑤ $p+q = 5, -p+q = -2$ 이므로

$$p = \frac{7}{2}, q = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 5-2i \in A$$

3. $\frac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\frac{3+11i}{8}$

② $\frac{9+11i}{8}$

③ $\frac{3+9i}{10}$

④ $\frac{3+11i}{10}$

⑤ $\frac{9+11i}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{6-3+11i}{6-3+11i} \\ &= \frac{3+11i}{10}\end{aligned}$$

4. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① i ② $-i$ ③ $1+i$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$$i^2 = -1, i^3 = i^2 \times i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$$

$$= i + (-1) + (-i) + 1 + i = i$$

5. $a = 2 + \sqrt{3}i$, $b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{2}{7}$

해설

$a = 2 + \sqrt{3}i$, $b = 2 - \sqrt{3}i$ 일 때

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \dots \textcircled{1}$$

이 때, $a+b = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$

$$ab = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 + 3 = 7 \text{ 이므로}$$

$a+b = 4$, $ab = 7$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} &= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} \\ &= \frac{16 - 14}{7} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

6. 복소수 $z = a + bi$ 일 때, z 의 켈레 복소수 $\bar{z} = a - bi$ 로 나타낸다. 다음 중 옳지 않은 것은? (단, a, b 는 실수)

① $\overline{2+i} = 2-i$

② $\overline{-2-\sqrt{3}i} = -2+\sqrt{3}i$

③ $\overline{i-1} = i+1$

④ $\overline{0} = 0$

⑤ $\overline{-2} = -2$

해설

켈레복소수는 허수부분의 부호를 바꾼다.

③ $i-1$ 의 허수부분은 i 이므로 $\overline{i-1} = -i-1$ 이다.

실수의 켈레복소수는 자기 자신이므로 ④, ⑤는 옳다.

7. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면
 $(x - 3)^2 = (2i)^2 \quad \therefore x^2 - 6x = -13$
 $x^2 - 6x - 10 = -13 - 10 = -23$
 $\therefore -23$

8. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = -\sqrt{12}$

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = -\sqrt{12}$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4}i = -\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4} = \sqrt{12}i$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}i$

9. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

㉠ -1 ㉡ 0 ㉢ 1 ㉣ 2 ㉤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 한다.

$$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$$

$$= 2k - 2i - 2ki$$

$$= 2k - (2 + 2k)i$$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

10. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

- ① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$$\Rightarrow (a+2)(2a-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

11. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를
 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면
 $1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$
 $3 + (a-6)i = (b-2) - ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
 $b = 5$, $a = 3$
 $\therefore a+b = 8$

12. $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 50i^{50}$ 의 값은?

- ① $-26 - 25i$ ② $-26 + 25i$ ③ 0
④ $-25 + 26i$ ⑤ $25 + 26i$

해설

$$\begin{aligned} & i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 50i^{50} \\ &= \{i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) + 4 \cdot 1\} + \\ & \{5i + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-i) + 8 \cdot 1\} \\ & + \dots + \{45i + 46 \cdot (-1) + 47 \cdot (-i) + 48 \cdot 1\} + 49i + 50 \cdot (-1) \\ & 12(2 - 2i) + 49i - 50 = -26 + 25i \end{aligned}$$

13. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 5

㉡ 7

㉢ $2\sqrt{3} + 4i$

㉣ 12

㉤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$$\begin{aligned}x + y &= 2\sqrt{3}, \\xy &= (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7 \text{ 이므로} \\x^2 + xy + y^2 &= (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

14. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켈레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.
 ㉡ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.
 ㉢ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$
 ㉡ (생략)
 ㉢ $\alpha = x + yi$ 라 하면
 $\alpha\beta = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ (x, y 는 실수)
 $x^2 + y^2 = 0$ 이려면 $x = 0, y = 0$
 즉, $\alpha = 0$

15. 복소수 z 와 그 켤레복소수 \bar{z} 에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

- ① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$ ② $z = 2 \pm \sqrt{3}i$ ③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$ ⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z + \bar{z} &= 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7 \\ \therefore a &= 2, b = \pm \sqrt{3} \\ \therefore z &= 2 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

17. 복소수 $z = x + yi$ 를 좌표평면 위에 점 $p(x, y)$ 에 대응시킬 때, $(3-4i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 p 의 자취가 나타내는 도형은?

- ① 기울기가 양인 직선 ② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3-4i)z &= (3-4i)(x+yi) \\ &= (3x+4y) + (-4x+3y)i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$ 이다.
 $\therefore y = \frac{4}{3}x$ (\Rightarrow 기울기가 양인 직선)

18. 복소수 $(1-xi)(1-i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 1$

해설

$(1-xi)(1-i) = (1-x) + (-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 0 $\Rightarrow 1-x = 0,$
 $x = 1$

19. $(3+4i)^5(15-20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3+4i)^5(3-4i)^5 \\ &= 5^5\{(3+4i)(3-4i)\}^5 \\ &= 5^5(5^2)^5 \\ &= 5^{15}\end{aligned}$$

20. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ (단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2, \overline{\alpha} = 2$

21. 복소수 z 의 켈레복소수를 \bar{z} 라 할 때, $z+3i = \overline{z-2i}$ 를 만족하는 복소수 z 를 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = a + bi$ 라 할 때,

(좌변): $z + 3i = a + (b + 3)i$

(우변): $z - 2i = (a + bi) - (a + bi)i$

$= (a + b) + (b - a)i$

$\therefore \overline{z - 2i} = (a + b) - (b - a)i$

(좌변) = (우변)이므로,

$a + (b + 3)i = (a + b) + (a - b)i$

$$\begin{cases} a + b = a \\ a - b = b + 3 \Rightarrow a = 3, b = 0 \end{cases}$$

$\therefore z = 3 + 0 \cdot i = 3$

22. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\therefore w\bar{w} = \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1$$

23. 다음 등식을 만족하는 실수 x 의 값을 a , y 의 값을 b 라 할 때, $a+2b$ 의 값을 구하여라.

(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켈레복소수이다.)

$$(2+i)\overline{(x+yi)} = 5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(2+i)\overline{(x+yi)} = 5(1-i)$$

$$\overline{(x+yi)} = \frac{5(1-i)}{2+i} = 1-3i$$

$$x+yi = 1+3i$$

$$a=1, b=3$$

$$\therefore a+2b=7$$

24. $z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1 + \sqrt{3}i$

② $2 + \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $2 + 2\sqrt{3}i$

⑤ $3 + 3\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i} \text{ 에서 } z^2 - z + 1 = 0 \therefore z^3 = -1$$

$$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z - 1) + 3z = 1 + 2z$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 이므로 } 1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$$

25. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\ &= (\sqrt{-3} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{-2}) - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\ &= \sqrt{-6} \times \sqrt{-6} - \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \\ &= -\sqrt{36} - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i = -6 - 2\sqrt{2}i \\ \therefore ab &= 12\sqrt{2} \end{aligned}$$