

1. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

2. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, r 라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이
 α, β, r 이므로
 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$
양변에 $\sqrt{2}$ 를 대입하면
 $4\sqrt{2} - 6 + 6$
 $= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$
 $\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$

3. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 $\omega, \bar{\omega}$ 라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?
- ① $\omega + \bar{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\bar{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \bar{\omega}, (\bar{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$
$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \omega^3 = 1,$$
$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$
$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

① $x^2 + x + 1 = 0$ 두근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로
 $\omega + \bar{\omega} = -1$ (○)

② $x^2 + x + 1 = 0$ 두근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로
 $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$ (○)

③ $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega \cdot \bar{\omega}$
 $= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$ (×)

④ $\omega + \bar{\omega} = -1,$
 $\bar{\omega} = -1 - \omega$
 $= -(1 + \omega) = \omega^2$
 $\omega + \bar{\omega} = -1, \omega = -1 - \bar{\omega} = -(1 + \bar{\omega})$
 $= \bar{\omega}^2$ (○)

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

4. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$

④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$$\begin{aligned} x^3 = 1 \text{에서 } x^3 - 1 &= 0 \\ \rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ \therefore x-1 = 0, \text{ 또는 } x^2 + x + 1 &= 0 \\ \therefore x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ \therefore \alpha\beta &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$ 의 값을 구해도 된다.

5. 연립방정식
$$\begin{cases} x - 2y + 8z = 7 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2x + 3y - 5z = 14 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ 3x + 4y + 19z = -29 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$
 을 풀어 답을 (x, y, z)

형태로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(11, -6, -2)$

해설

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠} \times 2$ 에서 $y - 3z = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢} - \textcircled{㉠} \times 3$ 에서 $2y - z = -10 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$
 $\textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 연립하면 $y = -6, z = -2$
 이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $x = 11$
 $\therefore x = 11, y = -6, z = -2$

6. $a \neq b$ 에 대해 연립방정식 $x - y = a, z - y = b, ab(x - z) = (a - b)y$ 를 풀 때, y 의 값을 구하면?

- ① $y = a$
- ② $y = b$
- ③ $y = a + b$
- ④ $y = a - b$
- ⑤ $y = ab$

해설

$x - y = a \cdots \cdots ①$
 $z - y = b \cdots \cdots ②$
① - ② 에서 $x - z = a - b \neq 0 (\because a \neq b)$
 $\therefore$ 주어진 식에서 $ab(a - b) = (a - b)y$
따라서 $y = ab$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z 를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{cases} x+y=1 \cdots \textcircled{1} \\ y+z=3 \cdots \textcircled{2} \\ z+x=4 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \Rightarrow 2(x+y+z) = 8$$

$$x+y+z = 4 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{1} \Rightarrow z = 3$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{2} \Rightarrow x = 1$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3} \Rightarrow y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

8. 다음 연립방정식 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{1}{2}$ 또는 0.5

▷ 정답 : $y = 1$

▷ 정답 : $z = 1$

해설

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉠}$ 에서 $\frac{1}{z} = 1, \therefore z = 1$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉡}$ 에서 $\frac{1}{x} = 2, \therefore x = \frac{1}{2}$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉢}$ 에서 $\frac{1}{y} = 1 \therefore y = 1$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 x 값이
될 수 없는 것은?

① $2\sqrt{2}$

② $-\sqrt{3}$

③ $\sqrt{5}$

④ $-2\sqrt{2}$

⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x - 2y)(x + y) = 0$$

⊖ $x = 2y$ 일 때

$$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$$

$$y^2 = 2, y = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$$

$$x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

⊕ $x = -y$ 일 때

$$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10, y^2 = 5, y = \pm\sqrt{5}$$

$$x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x,y 에 대하여 xy 는?

- ① 8 ② 3 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$$\begin{cases} x-y=2 & \dots ① \\ x^2+y^2=20 & \dots ② \end{cases}$$

①식 ($x=y+2$)을 ②식에 대입하면

$$(y+2)^2+y^2=20$$

$$2y^2+4y-16=0$$

$$(y+4)(y-2)=0$$

$$y=2, x=4 \rightarrow xy=8$$

$$y=-4, x=-2 \rightarrow xy=8$$

해설

①식을 제곱하면.

$$(x-y)^2=4$$

$$x^2+y^2-2xy=4$$

$$xy = \frac{x^2+y^2-4}{2} = \frac{20-4}{2} = 8$$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① - ② $\times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y, x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$ 불능

$$\text{ii) } x = -2y \text{ 일 때 } 4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x = \alpha, y = \beta \text{라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

13. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t + 4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

14. $xy = 2$, $xz = 4$, $yz = 8$ 일 때, $x + y + z$ 의 값을 구하여라. (단, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 식을 곱하면 $x^2y^2z^2 = 64$ 이므로 $xyz = 8$

$xy = 2$ 에서 $z = 4$

$xz = 4$ 에서 $y = 2$

$yz = 8$ 에서 $x = 1$

$\therefore x + y + z = 1 + 2 + 4 = 7$

15. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $-2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$
 $\alpha = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $1 + m + 2 - 4 = 0$
 $\therefore m = 1$
 $\therefore m + \alpha = 2$

16. a, b 는 실수라 한다. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 + a^2x + b^2 - 2a = 0$, $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2 + a^2\alpha + b^2 - 2a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 $(a^2 + 2a)\alpha - (a^2 + 2a) = 0$
 $\therefore (a^2 + 2a)(\alpha - 1) = 0$
 $\therefore a^2 + 2a = 0$ 또는 $\alpha = 1$
그런데 $a^2 + 2a = 0$ 일 때는 $a^2 = -2a$ 이므로
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
 $\therefore \alpha = 1$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $1 + a^2 + b^2 - 2a = 0$
 $\therefore (a - 1)^2 + b^2 = 0$
 a, b 는 실수이므로 $a - 1 = 0, b = 0$
 $\therefore a + b = 1$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

18. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$, $x^2 + kx + 2 = 0$ 이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면

$\alpha^2 + 2\alpha + k = 0$ 이고 $\alpha^2 + k\alpha + 2 = 0$ 이므로

$\alpha^2 + 2\alpha + k = \alpha^2 + k\alpha + 2$

$(2 - k)\alpha + (k - 2) = 0$

따라서 $\alpha = 1$ 이고

$1 + 2 + k = 0$ 이므로 $k = -3$

19. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$
이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로
㉠이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.
두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$
 $\therefore xy = 1$

20. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
 $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
 $(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2, y = -2$
 $\therefore xy = -4$

21. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x=y \\ y=\delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$$

22. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$ 을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha$, $y = \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

23. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots\text{㉠}$$

㉠에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37