

1. 다음 중  $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

①  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$

②  $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$

③  $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$

④  $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

⑤  $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이  $1+i$ 이면

다른 한 근은  $1-i$ 이다.

$$\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

주어진 조건에 맞는 방정식:

$$(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$$

$\therefore$  ①이 조건에 맞다

2. 방정식  $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을  $\alpha, \beta, r$ 라 할 때,  $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $2\sqrt{2}$       ③  $3\sqrt{2}$       ④  $4\sqrt{2}$       ⑤  $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이

$\alpha, \beta, r$ 이므로

$$2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$$

양변에  $\sqrt{2}$ 를 대입하면

$$4\sqrt{2} - 6 + 6$$

$$= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$$

$$\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$$

3. 방정식  $x^3 = 1$ 의 두 허근을  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$ 라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

①  $\omega + \bar{\omega} = -1$

②  $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$

③  $\omega^2 + (\bar{\omega})^2 = 1$

④  $\omega^2 = \bar{\omega}$ ,  $(\bar{\omega})^2 = \omega$

⑤  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \omega^3 = 1,$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

①  $x^2 + x + 1 = 0$  두근은  $\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega + \bar{\omega} = -1(\bigcirc)$$

②  $x^2 + x + 1 = 0$  두근은  $\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega \cdot \bar{\omega} = 1(\bigcirc)$$

③  $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega \cdot \bar{\omega}$   
 $= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1(\times)$

④  $\omega + \bar{\omega} = -1,$   
 $\bar{\omega} = -1 - \omega$

$$= -(1 + \omega) = \omega^2$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega = -1 - \bar{\omega} = -(1 + \bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^2(\bigcirc)$$

⑤  $\omega^2 + \omega + 1 = 0 (\bigcirc)$

4. 방정식  $x^3 = 1$ 의 두 허근을  $\alpha, \beta$ 라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

①  $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

②  $\alpha = \beta^2$

③  $\alpha^2 + \beta^2 = -1$

④  $\alpha\beta = -1$

⑤  $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1 \text{ 에서 } x^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x-1 = 0, \text{ 또는 } x^2+x+1 = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha\beta &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로  
근과 계수와의 관계를 이용하여  
 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$ 의 값을 구해도 된다.

5. 연립방정식 
$$\begin{cases} x - 2y + 8z = 7 & \dots\dots \textcircled{\text{㉠}} \\ 2x + 3y - 5z = 14 & \dots\dots \textcircled{\text{㉡}} \\ 3x + 4y + 19z = -29 & \dots\dots \textcircled{\text{㉢}} \end{cases}$$
 을 풀어 답을  $(x, y, z)$

형태로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답:  $(11, -6, -2)$

해설

$\textcircled{\text{㉡}} - \textcircled{\text{㉠}} \times 2$  에서  $y - 3z = 0 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$

$\textcircled{\text{㉢}} - \textcircled{\text{㉠}} \times 3$  에서  $2y - z = -10 \dots\dots \textcircled{\text{㉣}}$

$\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$  을 연립하면  $y = -6, z = -2$

이것을  $\textcircled{\text{㉠}}$  에 대입하면  $x = 11$

$\therefore x = 11, y = -6, z = -2$

6.  $a \neq b$ 에 대해 연립방정식  $x - y = a, z - y = b, ab(x - z) = (a - b)y$ 를 풀 때,  $y$ 의 값을 구하면?

①  $y = a$

②  $y = b$

③  $y = a + b$

④  $y = a - b$

⑤  $y = ab$

해설

$$x - y = a \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$z - y = b \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 에서 } x - z = a - b \neq 0 (\because a \neq b)$$

$$\therefore \text{ 주어진 식에서 } ab(a - b) = (a - b)y$$

$$\text{따라서 } y = ab$$

7. 연립방정식  $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 3 \\ z + x = 4 \end{cases}$  를 만족하는  $x, y, z$ 를 구할 때,  $x^2 + y^2 + z^2$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{cases} x + y = 1 \cdots \text{㉠} \\ y + z = 3 \cdots \text{㉡} \\ z + x = 4 \cdots \text{㉢} \end{cases}$$

$$\text{㉠} + \text{㉡} + \text{㉢} \Rightarrow 2(x + y + z) = 8$$

$$x + y + z = 4 \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉣} - \text{㉠} \Rightarrow z = 3$$

$$\text{㉣} - \text{㉡} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{㉣} - \text{㉢} \Rightarrow y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

8. 다음 연립방정식 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \cdots \text{㉠} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \cdots \text{㉡} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 3 \cdots \text{㉢} \end{cases}$$
 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 :  $x = \frac{1}{2}$  또는 0.5

▷ 정답 :  $y = 1$

▷ 정답 :  $z = 1$

해설

$$\text{㉠} + \text{㉡} + \text{㉢} \text{에서 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉣} - \text{㉠} \text{에서 } \frac{1}{z} = 1, \therefore z = 1$$

$$\text{㉣} - \text{㉡} \text{에서 } \frac{1}{x} = 2, \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\text{㉣} - \text{㉢} \text{에서 } \frac{1}{y} = 1 \therefore y = 1$$

9. 연립방정식  $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$  을 만족하는  $x, y$ 에 대하여  $x$ 값이

될 수 없는 것은?

①  $2\sqrt{2}$

②  $-\sqrt{3}$

③  $\sqrt{5}$

④  $-2\sqrt{2}$

⑤  $-\sqrt{5}$

해설

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x - 2y)(x + y) = 0$$

㉠  $x = 2y$  일 때

$$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$$

$$y^2 = 2, y = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$$

$$x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

㉡  $x = -y$  일 때

$$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10, y^2 = 5, y = \pm\sqrt{5}$$

$$x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$$

10. 연립방정식  $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$  을 만족하는  $x, y$ 에 대하여  $xy$ 는?

① 8

② 3

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$$\begin{cases} x - y = 2 & \dots \text{①} \\ x^2 + y^2 = 20 & \dots \text{②} \end{cases}$$

①식 ( $x = y + 2$ )을 ②식에 대입하면

$$(y + 2)^2 + y^2 = 20$$

$$2y^2 + 4y - 16 = 0$$

$$(y + 4)(y - 2) = 0$$

$$y = 2, x = 4 \rightarrow xy = 8$$

$$y = -4, x = -2 \rightarrow xy = 8$$

해설

①식을 제곱하면.

$$(x - y)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4$$

$$xy = \frac{x^2 + y^2 - 4}{2} = \frac{20 - 4}{2} = 8$$

11. 연립방정식  $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$  의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,  $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1      ② 0      ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{5}{3}$       ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \text{①} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \text{②} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① - ② × 2를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

∴  $x = y, x = -2y$  각각을 ① 식에 대입하면

i)  $x = y$ 일 때  $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$  불능

ii)  $x = -2y$ 일 때  $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$   $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,  $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

12. 연립방정식  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$  의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때,  $ab$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \dots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면  $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

13. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

$x, y$  는  $t$  에 대한 이차방정식  $t^2 + 3t - 4 = 0$  의 두 근이므로  
 $(t-1)(t+4) = 0$  에서

$t = 1$  또는  $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

14.  $xy = 2$ ,  $xz = 4$ ,  $yz = 8$  일 때,  $x + y + z$ 의 값을 구하여라. (단,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ )

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

세 식을 곱하면  $x^2y^2z^2 = 64$ 이므로  $xyz = 8$

$xy = 2$ 에서  $z = 4$

$xz = 4$ 에서  $y = 2$

$yz = 8$ 에서  $x = 1$

$\therefore x + y + z = 1 + 2 + 4 = 7$

15. 다음 두 방정식이 공통근  $\alpha$ 를 갖는다. 이 때,  $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

### 해설

두 방정식의 공통근이  $\alpha$ 이므로

$$\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{ 에서 } -2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$$

$$\alpha = 1 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } 1 + m + 2 - 4 = 0$$

$$\therefore m = 1$$

$$\therefore m + \alpha = 2$$

16.  $a, b$ 는 실수라 한다.  $x$ 에 관한 두 개의 이차방정식  $x^2 + a^2x + b^2 - 2a = 0$ ,  $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가질 때,  $a + b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

### 해설

공통근을  $\alpha$ 라 하면

$$\alpha^2 + a^2\alpha + b^2 - 2a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{하면 } (a^2 + 2a)\alpha - (a^2 + 2a) = 0$$

$$\therefore (a^2 + 2a)(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore a^2 + 2a = 0 \quad \text{또는} \quad \alpha = 1$$

그런데  $a^2 + 2a = 0$ 일 때는  $a^2 = -2a$ 이므로  
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면 } 1 + a^2 + b^2 - 2a = 0$$

$$\therefore (a - 1)^2 + b^2 = 0$$

$$a, b \text{는 실수이므로 } a - 1 = 0, b = 0$$

$$\therefore a + b = 1$$

17. 연립방정식  $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$  를 만족하는 순서쌍  $(x,y)$  가 한 개 뿐일 때, 양의 실수  $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots \textcircled{1} \\ xy=a \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서  $y = -x + 2a$  를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$  즉  $x^2 - 2ax + a = 0$  이 한 개의

실근을 가져야 하므로  $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$  또는  $1$  그런데

$a$  는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

18.  $x$ 에 대한 두 이차방정식  $x^2 + 2x + k = 0$ ,  $x^2 + kx + 2 = 0$ 이 단 한 개의 공통근을 가질 때,  $k$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

공통근을  $\alpha$  라 하면

$\alpha^2 + 2\alpha + k = 0$  이고  $\alpha^2 + k\alpha + 2 = 0$  이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha + k = \alpha^2 + k\alpha + 2$$

$$(2 - k)\alpha + (k - 2) = 0$$

따라서  $\alpha = 1$  이고

$$1 + 2 + k = 0 \text{ 이므로 } k = -3$$

19. 방정식  $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수  $x, y$ 에 대하여  $xy$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

### 해설

주어진 방정식을 정리하면  $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때,  $(x - y)^2 \geq 0$ ,  $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

⊕이 성립하려면  $x - y = 0$ ,  $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면  $x = 1$ ,  $y = 1$

$\therefore xy = 1$

20. 방정식  $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$  을 만족시키는 실수  $x, y$ 의 곱  $xy$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $-4$

해설

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

$x, y$ 가 실수이므로  $x + y = 0, x - 2 = 0$

$$\therefore x = 2, y = -2$$

$$\therefore xy = -4$$

21. 방정식  $2xy - 4x - y = 4$ 를 만족하는 양의 정수  $x, y$ 를 구하면  $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ ,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

### 해설

주어진 식을 변형하면  $(2x - 1)(y - 2) = 6$

조건에서  $x, y$ 가 양의 정수이므로

$2x - 1, y - 2$ 도 각각 정수이고 특히  $2x - 1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y - 2 = 6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ y - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$

22. 방정식  $xy + 2x = 3y + 10$  을 만족하는 양의 정수가  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$  일 때,  $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

### 해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, \quad xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, \quad y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

23. 방정식  $2x + 5y = 84$  를 만족하는 양의 정수  $x, y$  의 해 중에서  $x$  의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을  $y$  에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦에서  $y$  가 양의 정수이므로  $42 - x$  가 5의 배수이다.

따라서,  $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$  의 최댓값은 37