

1. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E까지의 거리 $f(x)$ 는
 $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x - 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -5x + 8$
(ii) $-1 \leq x < 0$, $f(x) = x + 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -3x + 10$
(iii) $0 \leq x < 1$, $f(x) = x + 1 + x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -x + 10$
(iv) $1 \leq x < 3$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 - x + 3 - x + 5 = x + 8$
(v) $3 \leq x < 5$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 - x + 5 = 3x + 2$
(vi) $5 \leq x$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 + x - 5 = 5x - 8$

이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.
 $\therefore f(1) = |1 + 1| + |1| + |1 - 1| + |1 - 3| + |1 - 5| = 9$

2. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a , 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이 되도록 하는 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$$

$$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$$

$$2a = 18$$

$$\therefore a = 9$$

3. 좌표평면 위의 두 점 A, B 사이의 거리를 $\star(A, B)$ 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① $\star(A, B) \geq 0$
 - ② $\star(A, B) = \star(B, A)$
 - ③ $\star(A, B) = \star(A, C)$ 이면 두 점 B, C 는 일치한다.
 - ④ $\star(A, B) = 0$ 이면 두 점 A, B는 일치한다.
 - ⑤ 세 점 A, B, C 에 대하여 항상 관계식 $\star(A, B) + \star(B, C) \geq \star(A, C)$ 가 성립한다.

해설

- ① 거리는 음의 수가 나올 수 없으므로 참
- ② 좌변과 우변 모두 A와 B 사이의 거리이므로 참
- ③ A로 부터 같은 거리에 있는 점은 수없이 많으므로 거짓
- ④ 거리가 0이므로 동일한 점이므로 참
- ⑤ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 합은 $\overline{AC}$ 보다 같거나 크므로 참

4. 두 점 A(-2, 1), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$

⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(0 - (-2))^2 + (a - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(0 - 4)^2 + (a - 5)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$$

$$8a = 36$$

$$\therefore a = \frac{9}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ 이다.

5. 두 점 A(4, -2), B(3, 5)로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

- ① P(-2, -1) ② P(-1, 0) ③ P(0, 1)
④ P(1, 2) ⑤ P(2, 3)

해설

점 P의 좌표를 P(0, b)라고 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$$

$$14b = 14$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(0, 1)

6. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (0, 0) ② (1, 0) ③ (2, 0) ④ (3, 0) ⑤ (4, 0)

해설

P의 좌표를 $(x, 0)$ 라 하면

$$\sqrt{(-3-x)^2+2^2}=\sqrt{(4-x)^2+5^2}$$

$$6x+13=-8x+41, \quad x=2$$

$$\therefore P=(2, 0)$$

7. 좌표평면 위의 두 점 A(-2, 1), B(3, 0)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① (1, -2)

② (0, -2)

③ (1, 2)

④ (-1, 3)

⑤ (2, 1)

해설

y축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면

$$(-2 - 0)^2 + (1 - \alpha)^2 = (0 - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\therefore \alpha = -2$$

8. 두 점 $(-4, 1)$, $(2, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

- ① $(0, -1)$ ② $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
④ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2, 2)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, \alpha)$ 라 하면
 $\sqrt{4^2 + (\alpha - 1)^2} = \sqrt{2^2 + (\alpha - 3)^2}$
 $\therefore \alpha = -1$
 $\therefore y$ 축 위의 점 : $(0, -1)$

9. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$ 로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$ 로 놓으면

$$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$$

$$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$$

$$10a + 10 = -14a + 13$$

$$\therefore 24a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}, 2a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

10. 세 점 A(4, 2), B(0, -2), C(-2, 0) 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② 둔각삼각형

③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면

$\overline{AB}$

$$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

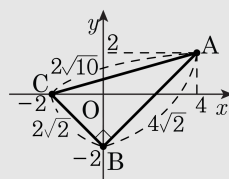
$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} =$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



11. 좌표평면 위의 세 점 A(4, -2), B(1, 7), C(-2, 1)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?
- ① 정삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

세변의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ 이고, $\overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 직각이등변삼각형이다.

12. 점 A(1, 2)와 B(-1, -2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

- ① $C(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ② $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ③ $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ④ $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ⑤ $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
점 C의 좌표를 (x, y)라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 15 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 15 \dots\dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $x + 2y = 0$
 $\therefore x = -2y$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4y^2 - 4y + y^2 + 4y = 15$
 $\therefore y^2 = 3$
 $\therefore y = \pm\sqrt{3}$
따라서 $x = \mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)
 $\therefore C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

13. 세 점 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

- ① (2, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (3, -2)
- ④ (2, 2)
- ⑤ (1, -2)

해설

외심의 좌표를 $O(a, b)$ 라 하면 $\overline{OA} = \overline{OB}$
즉, $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 2)^2$
 $\therefore 7a - b = 16 \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{OA} = \overline{OC}$
즉 $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2$ 이므로
 $(a - 6)^2 + (b - 1)^2 = (a - 2)^2 + (b - 3)^2$
 $\therefore 2a - b = 6 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 2, b = -2$
 $\therefore O(2, -2)$

14. 세 점 A(2, 1), B(-4, 3), C(-1, -3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 (a, b) 라고 할때, $a + b$ 를 구하면?

- ① -2
- ② 3
- ③ 4
- ④ -1
- ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O라 하면
 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 이다.
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2}$ 에서 $3a - b = -5 \dots \textcircled{1}$
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2}$ 에서 $6a + 8b = -5 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 를 연립하면
 $a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a + b = -1$

15. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x 축 위에 있고, 두 점 A,B의 좌표가 각각 A(-2,1),B(3,4) 일 때, 점 P의 x 좌표는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 으로 놓으면

$$\sqrt{(a+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (-4)^2}$$

양변 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 4a + 5 = a^2 - 6a + 25, 10a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

16. 다음은 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

직선 BC를 x 축, 변 BC의 수직이등분선을 y 축으로 잡고, $A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$ 라고 하자. (단, $b \neq 0, c > 0$)
 (i) $a \neq c$ 이고 $a \neq -c$ 일 때 직선 AC의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$ 이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
 $y = \boxed{\text{(가)}} \left(x - \frac{a+c}{2} \right) + \frac{b}{2}$
 $= \boxed{\text{(가)}} x + \boxed{\text{(나)}} \dots\dots\text{㉠}$
 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
 $y = -\frac{a+c}{b}x + \boxed{\text{(나)}} \dots\dots\text{㉡}$
 두 직선 ㉠, ㉡의 y 절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y 축 위의 점 $(0, \boxed{\text{(나)}})$ 에서 만난다. 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
 (ii) $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때 $\triangle ABC$ 는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

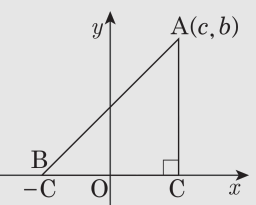
위

의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형
- ② $-\frac{a-c}{b}, \frac{2b}{a^2+b^2-c^2}$, 정삼각형
- ③ $-\frac{a-c}{b}, \frac{2b}{-a^2+b^2-c^2}$, 이등변삼각형
- ④ $\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형
- ⑤ $\frac{a-c}{b}, \frac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\frac{b}{a-c}$ 이므로
 변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $\frac{b}{a-c} \cdot m = -1$ 에서 $m = -\frac{a-c}{b}$ 이다.



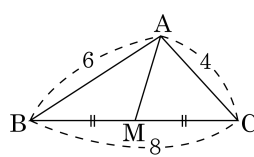
이때, 중점 $E \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2} \right)$ 이므로 변

$$\begin{aligned} \text{AC에 수직인 직선의 방정식은} \\ y &= \left[-\frac{a-c}{b} \right] \left(x - \frac{a+c}{2} \right) + \frac{b}{2} \\ &= -\frac{a-c}{b}x + \frac{2b}{a^2-c^2} + \frac{b}{2} \\ &= \left[-\frac{a-c}{b} \right] x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b} \right] \end{aligned}$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ 이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.

17. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

18. 좌표평면에 두 점 A(1, 3), B(2, -1) 이 있다. 점 C(m, 2) 에 대하여 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소일 때의 m 의 값을 구하면?

- ① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소인 경우는
세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때이므로
직선 AB 와 BC 의 기울기가 같다.

$$\text{따라서 } \frac{-1-3}{2-1} = \frac{2-(-1)}{m-2}$$

$$\therefore m = \frac{5}{4}$$

19. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 3)$, $B(5, -5)$ 가 있다. 점 $C(3, m)$ 에 대하여 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소일 때, m 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소가 되기 위해서

점 A, B, C 는 한 직선 위에 있어야 한다.

따라서 A 와 B 를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = -2x + 5$ 이다.

C 는 이 직선 위의 점이므로 대입하면 m 은 -1

20. 두 점의 좌표가 A (5, 3), B (-2, 1) 이고, x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때 점 P 의 좌표는?

① $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ ② $P\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$
④ $P\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ ⑤ $P(1, 0)$

해설

A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 하면 A' 는 $(5, -3)$ 이다.

$\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$ 이고, $\overline{A'P} + \overline{BP}$ 의 최
솟값은

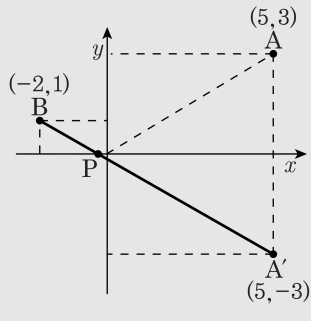
점 A'와 점 B를 이은 선분의 길이와 같다.

직선 A'B 의 방정식은

$$y + 3 = \frac{1 - (-3)}{-2 - 5}(x - 5), y = -\frac{4}{7}x - \frac{1}{7}$$

이 직선과 x 축과의 교점이 점 P이므로

$$\therefore P\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$



21. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

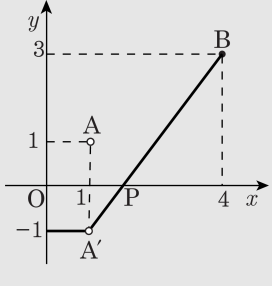
- ① 5 ② $2\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설

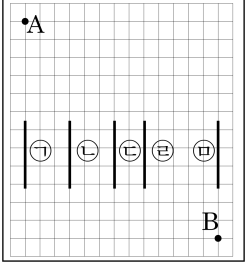
$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 A (1, 1)을 x축에 대해 대칭이동시킨 A'(1, -1)과 B (4, 3)을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이므로

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$



22. 다음 그림은 어느 운동장에 있는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 5개의 평균대를 모눈종이에 나타낸 것이다. 동현이가 A 지점에서 출발하여 평균대 위를 걸어서 지나 B 지점까지 도착하는 경기를 하려 한다. 이동 거리를 가장 짧게 하려 할 때, 지나야 할 평균대는?

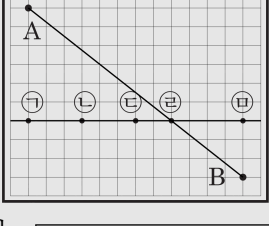


- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

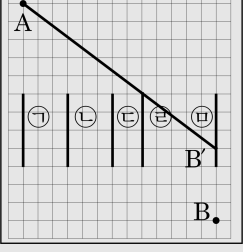
- ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

각 평균대의 한 끝점을 다른 한 끝점에 오도록 접으면 다음 그림과 같으므로 $\overline{AB}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 걸어서 지날 때 이동거리가 가장 짧다.



평행사변형의 성질을 이용하여 그림과 같이 B 지점에서 위로 4 칸 이동한 지점 B'을 잡으면 이동 거리는 A 지점에서 B' 지점까지 이동한 후 B' 지점에서 B 지점까지 이동하는 거리와 같다. 이동 거리가 가장 짧은 것은 $\overline{AB'} + \overline{B'B}$ 이므로 $\overline{AB'}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 지나야 한다.

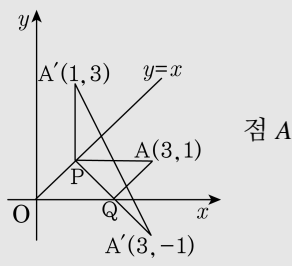


23. 정점 $A(3, 1)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

- ① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

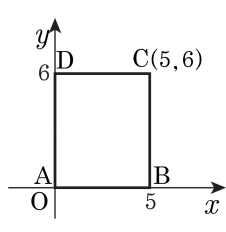
해설

점 A 의 $y = x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



의 x 축에 대한 A'' 라 하면,
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''}$
 $\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

24. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 A(0,0), B(5,0), C(5,6), D(0,6)로 이루어진 □ABCD가 있다. $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는 점 P의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ③ (0,3)

- ④ (5,0) ⑤ (0,6)

해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD의 교점을

을

P라 하고 임의의 점 P'을 잡으면

$$\overline{P'A} + \overline{P'C} \geq \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{PC}$$

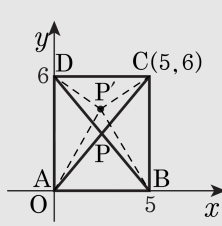
$$\overline{P'B} + \overline{P'D} \geq \overline{BD} = \overline{PB} + \overline{PD}$$

$$\therefore \overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D}$$

$$\geq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$$

즉, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는

점 P는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 이다.



25. 점 A(5, -4), B(-1, 2) 를 잇는 선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 중점 M 의 좌표를 (a, b) 라고 하자. 이 때, a + b 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$P \left(\frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5}{1 + 2}, \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)}{1 + 2} \right) = (3, -2)$$
$$Q \left(\frac{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 5}{1 - 2}, \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-4)}{1 - 2} \right) = (11, -10)$$
선분 PQ 의 중점 M
$$(a, b) = \left(\frac{11 + 3}{2}, \frac{-2 - 10}{2} \right) = (7, -6)$$
$$\therefore a + b = 1$$

26. 좌표평면 위의 점 A(1, 4) 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 3 : 2 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 B(a , b) 라 하면

점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{3a-2}{3-2}, \frac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 (4, 1) 이므로

$$3a-2=4 \quad \therefore a=2,$$

$$3b-8=1 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore B(2, 3)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

27. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$$P\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1}\right) = (2, 4)$$

$$Q\left(\frac{2 \times 2 - 1 \times 0}{2 - 1}, \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1}\right) = (4, 12) \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ 이다.}$$

28. 수직선 위의 두 점 A,B에 대하여 선분 AB를 $m:n$ 으로 내분한 점을 C, 외분한 점을 D라 할 때, $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{\square}{\overline{AB}}$ 가 성립한다. $\square$ 안에 알맞은 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

네 점의 좌표를 각각 A(0), B(b), C(c), D(d)라 하면

$$c = \frac{mb}{m+n}, d = \frac{mb}{m-n}$$

($\because$ A의 좌표가 0)

$$\therefore \overline{AC} = c - 0 = \frac{mb}{m+n}$$

$$\overline{AD} = d - 0 = \frac{mb}{m-n}$$

$$\overline{AB} = b - 0 = b$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} &= \frac{m+n}{mb} + \frac{m-n}{mb} \\ &= \frac{2m}{mb} = \frac{2}{b} = \frac{2}{\overline{AB}} \end{aligned}$$

29. 점 A(1, 3), B(3, 2)를 잇는 선분과 직선 $x - y + 1 = 0$ 과의 교점을 P라 할 때, $\overline{AP} : \overline{BP}$ 는?

① 1 : 1 ② 1 : 2 ③ 1 : 3 ④ 2 : 1 ⑤ 3 : 1

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : k$ 라 하면

P의 좌표는 $\left(\frac{k+3}{1+k}, \frac{3k+2}{1+k}\right)$ 이다.

P는 직선 $x - y + 1 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{k+3}{1+k} - \frac{3k+2}{1+k} + 1 = 0,$$

$$k+3 - (3k+2) + (1+k) = 0 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$$

30. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(4, 2), B(0, 3), C(-2, -4)일 때, 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하면?

- ① D(1, 5) ② D(2, 1) ③ D(3, 2)
④ D(2, -5) ⑤ D(1, 3)

해설

평행사변형은 밑변과 윗변이 평행하면서 길이가 같다.
따라서 점 A가 B의 좌표보다
 x 축으로 4만큼, y 축으로 -1 만큼 이동한 것을
점 C에 적용할 수 있다.
따라서 D $(-2 + 4, -4 + (-1))$
 $\therefore$ D(2, -5)

31. 네 점 A(3, 5), B(a, 10), C(-1, -1), D(-2, b)를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 될 때, a, b에 대하여 a + b의 값은?

- ① -2 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

평행사변형이 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

즉, $(\overline{AC}$ 의 중점) $=$ ($\overline{BD}$ 의 중점)이므로

$$\begin{aligned}(\overline{AC} \text{의 중점}) &= \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{5+(-1)}{2} \right) = (1, 2) \\ &= \left(\frac{a+(-2)}{2}, \frac{10+b}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{a+(-2)}{2} = 1, \frac{10+b}{2} = 2 \text{ 에서 } a = 4, b = -6$$

$$\therefore a + b = -2$$

32. A (-1, -1), B (5, -2), C (3, 3)을 세 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 를 이루는 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 D의 좌표는?

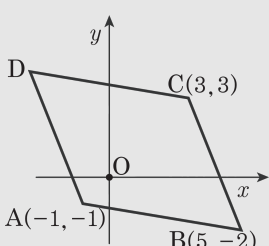
- ① $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$
- ② (1, 1)
- ③ (-3, 4)
- ④ (8, 1)
- ⑤ $\left(4, \frac{1}{2}\right)$

해설

평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로
 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치
D(x,y)라 하면
 $\overline{AC}$ 의 중점 : $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1, 1)$
 $\overline{BD}$ 의 중점 : $\left(\frac{5+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$
 $\frac{5+x}{2} = 1, \frac{-2+y}{2} = 1$
 $\therefore x = -3, y = 4$
 $\therefore D(-3, 4)$

해설

B → C로 갈 때 x축으로 -2, y축으로 +5만큼 이동했으므로
A → D로 갈때도 같은 만큼 이동한다.
 $\therefore D = (-1 - 2, -1 + 5) = (-3, 4)$



33. 재질이 고른 삼각형 모양의 널빤지를 좌표평면 위에 놓으니 세 꼭짓점의 좌표가 A(9, 7), B(2, 3), C(7, 5)가 되었다. 손가락을 수직으로 세워 이 널빤지를 그 위에 얹을 때 수평이 되도록 하기 위한 내부의 한 점의 좌표를 구하면?

- ① (4, 5) ② (5, 5) ③ (5, 6) ④ (6, 5) ⑤ (6, 6)

해설

수평이 유지되기 위해선 무게중심에 손가락을 세워야한다.

따라서 무게중심 G는

$$G = \left(\frac{9 + 2 + 7}{3}, \frac{7 + 3 + 5}{3} \right) = (6, 5)$$

34. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 A(-1, 4), B(0, 3) 이고, 무게중심의 좌표가 G(2, 1) 일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

- ① (7, -4)
- ② (3, -6)
- ③ (5, -5)
- ④ (-1, 8)
- ⑤ (1, 1)

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

C = (x, y) 라 하면

$$\left(\frac{-1+0+x}{3}, \frac{4+3+y}{3}\right) = (2, 1)$$

$$\therefore x = 7 \quad y = -4$$

$$\therefore C = (7, -4)$$

35. 세 꼭짓점이 모두 제 1사분면에 있는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b) 이라고 한다. 세 꼭짓점 A, B, C에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3 이라 할 때, $\overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3}$ 의 값을 구하면?

- ① $a + b$
- ② $\frac{a + b}{3}$
- ③ $\frac{1}{3}b$
- ④ $3b$
- ⑤ $6b$

해설

$\overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3}$ 의 값은 꼭짓점 A, B, C의 y 좌표의 합과 같으므로,
세 꼭짓점의 y 좌표를 y_1, y_2, y_3 라 하자.
무게중심의 공식을 이용하면,
$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = b$$
$$\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3b$$

36. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(1,3)$ 에 대하여 선분 OA, AB, BO 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

- ① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $(1, -1)$ ③ $(1, 1)$
 ④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2 + 1},$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2 + 1}$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

점 Q, R 도 마찬가지로 방법으로 계산하면

$$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{3} + 1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

37. 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 P(1, 3), Q(5, 1), R(4, 4)일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는?

① (3, 2)

② (3, 3)

③ $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

④ $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$

⑤ $\left(\frac{11}{3}, 2\right)$

해설

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하면

$\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이 P(1, 3)이므로

$$\frac{2x_2 + x_1}{2 + 1} = 1, \frac{2y_2 + y_1}{2 + 1} = 3$$

$$\therefore 2x_2 + x_1 = 3, 2y_2 + y_1 = 9 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$\overline{BC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이 Q(5, -1)이므로

$$\frac{2x_3 + x_2}{2 + 1} = 5, \frac{2y_3 + y_2}{2 + 1} = -1$$

$$\therefore 2x_3 + x_2 = 15, 2y_3 + y_2 = -3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\overline{CA}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이 R(4, 4)이므로

$$\frac{2x_1 + x_3}{2 + 1} = 4, \frac{2y_1 + y_3}{2 + 1} = 4$$

$$\therefore 2x_1 + x_3 = 12, 2y_1 + y_3 = 12 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

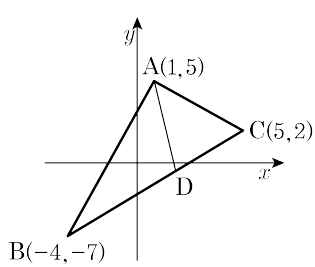
$$3(x_1 + x_2 + x_3) = 30, 3(y_1 + y_2 + y_3) = 18$$

$$\therefore (x_1 + x_2 + x_3) = 10, (y_1 + y_2 + y_3) = 6$$

따라서 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{10}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 2$ 이므로 삼각형

ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

38. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(-4, -7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$
 ③ $(2, -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$
 ⑤ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

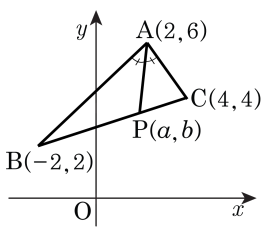
$$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$$

$$\therefore D\left(\frac{-20+65}{13+5}, \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

39. 다음 그림과 같이 세 점 A(2, 6), B(-2, 2), C(4, 4) 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 P(a , b) 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



- ① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 P(a , b) 라 하면
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
 $\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 P(a , b) 는 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.
 $\therefore a = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2 + 1} = 2$,
 $b = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{10}{3}$
 $\therefore 3ab = 3 \cdot 2 \cdot \frac{10}{3} = 20$

40. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,6)$, $B(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

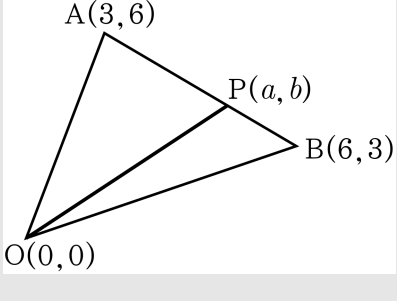
해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 넓이가 같으므로 $\triangle OAP = 2\triangle OBP$ 이려면 P 는 두 점 A, B 를 $2:1$ 로 내분하여야 한다.

따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $P(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



41. 두 점 A(3, 0), B(0, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x + 2y + 9 = 0$

② $3x + 2y = 0$

③ $6x - 4y + 9 = 0$

④ $-3x + 2y = 0$

⑤ $-6x + 4y - 5 = 0$

해설

구하는 점을 P(x, y)라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 에서

$$(x-3)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-2)^2\} = 5$$

정리하면 $-6x + 4y = 0$

$$\therefore -3x + 2y = 0$$

42. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?
- ① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
- ④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한 점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-5)^2\} \\ &\quad + \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} \\ &= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 60 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 8y + 16) + 10 \\ &= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 10\end{aligned}$$

따라서 $x = 3$, $y = 4$ 일 때 최솟값을 갖는다.

43. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 $P(x)$ 에 대하여 $\overline{AP^2} + \overline{BP^2} + \overline{CP^2}$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?
- ① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$$\begin{aligned} &\overline{AP^2} + \overline{BP^2} + \overline{CP^2} \\ &= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2 \\ &= 3(x-6)^2 + 42 \end{aligned}$$

따라서 $x=6$ 일 때 최소가 된다.

44. 세 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

P(x, y)라 두면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$