1. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P 에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E 까지의 거리 $f(x)$는
$f(x)=|x+1|+|x|+|x-1|+|x-3|+|x-5|$

(i) $x<-1$, $f(x)=-x-1-x-x+1-x+3-x+5=-5x+8$
(ii) $-1\le x<0$, $f(x)=x+1-x-x+1-x+3-x+5$
$=-3x+10$
(iii) $0\le x<1$, $f(x)=x+1+x-x+1-x+3-x+5=-x+10$
(iv) $1\le x<3$, $f(x)=x+1+x+x-1-x+3-x+5=x+8$
(v) $3\le x<5$, $f(x)=x+1+x+x-1+x-3-x+5=3x+2$
(vi) $5\le x$, $f(x)=x+1+x+x-1+x-3+x-5=5x-8$
이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x=1$ 인 경우 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$\therefore\ f(1)=|1+1|+|1|+|1-1|+|1-3|+|1-5|=9$

2. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이 되도록 하는 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$

$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$

$2a = 18$

$\therefore\ a = 9$

3. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A, B}$ 사이의 거리를 $\star(\mathrm{A, B})$ 라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\star(\mathrm{A, B}) \geq 0$

② $\star(\mathrm{A, B}) = \star(\mathrm{B, A})$

③ $\star(\mathrm{A, B}) = \star(\mathrm{A, C})$ 이면 두 점 $\mathrm{B, C}$ 는 일치한다.

④ $\star(\mathrm{A, B}) = 0$ 이면 두 점 $\mathrm{A, B}$는 일치한다.

⑤ 세 점 $\mathrm{A, B, C}$ 에 대하여 항상 관계식
$\star(\mathrm{A, B}) + \star(\mathrm{B, C}) \geq \star(\mathrm{A, C})$ 가 성립한다.

해설

① 거리는 음의 수가 나올 수 없으므로 참
② 좌변과 우변 모두 A와 B 사이의 거리이므로 참
③ A로 부터 같은 거리에 있는 점은 수없이 많으므로 거짓
④ 거리가 0이므로 동일한 점이므로 참
⑤ $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$의 합은 $\overline{\mathrm{AC}}$보다 같거나 크므로 참

4. 두 점 A$(-2, 1)$, B$(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$
④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$ ⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\sqrt{\{0-(-2)\}^2 + (a-1)^2}$
$= \sqrt{(0-4)^2 + (a-5)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2 - 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$
$8a = 36$
$\therefore a = \frac{9}{2}$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$이다.

5. 두 점 $A(4,\ -2)$, $B(3,\ 5)$로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P(-2,\ -1)$ ② $P(-1,\ 0)$ ③ $P(0,\ 1)$

④ $P(1,\ 2)$ ⑤ $P(2,\ 3)$

해설

점 P의 좌표를 $P(0,\ b)$라고 하면

$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$

$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$이므로

$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$

$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$

$14b = 14$

$\therefore b = 1$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(0,\ 1)$

6. 두 점 $A(-3,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $(1,0)$ ③ $(2,0)$ ④ $(3,0)$ ⑤ $(4,0)$

해설

P의 좌표를 $(x,\ 0)$라 하면

$\sqrt{(-3-x)^2+2^2}=\sqrt{(4-x)^2+5^2}$

$6x+13=-8x+41,\quad x=2$

$\therefore \mathrm{P}=(2,0)$

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 1)$, $B(3, 0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(1, -2)$　② $(0, -2)$　③ $(1, 2)$

④ $(-1, 3)$　⑤ $(2, 1)$

해설

y축 위의 점을 $(0, \alpha)$라 하면

$(-2-0)^2 + (1-\alpha)^2 = (0-3)^2 + \alpha^2$

$\therefore\ \alpha = -2$

8. 두 점 $(-4,\ 1)$, $(2,\ 3)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(0,\ -1)$ ② $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $(2,\ 2)$

해설

y축 위의 점을 $(0,\ \alpha)$라 하면

$$\sqrt{4^2+(\alpha-1)^2}=\sqrt{2^2+(\alpha-3)^2}$$

$\therefore\ \alpha=-1$

$\therefore y$ 축 위의 점 : $(0, -1)$

9. 두 점 $(1,-3)$, $(3,2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y=2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y=2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면

$\sqrt{(1-a)^2+(-3-2a)^2}$

$=\sqrt{(3-a)^2+(2-2a)^2}$

$a^2-2a+1+4a^2+12a+9=a^2-6a+9+4a^2-8a+4$

$10a+10=-14a+13$

$\therefore\ 24a=3$

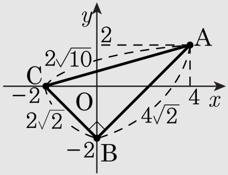
$\therefore\ a=\frac{1}{8},\ 2a=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

10. 세 점 A(4, 2), B(0, −2), C(−2, 0) 을 꼭짓점으로 하는 △ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 둔각삼각형
③ ∠A = 90° 인 직각삼각형
④ ∠B = 90° 인 직각삼각형
⑤ ∠C = 90° 인 직각삼각형

해설



△ABC 의 세변의 길이를 구하면

$\overline{AB}$

$= \sqrt{(0-4)^2+(-2-2)^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2+\{0-(-2)\}^2} =$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2+(2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

△ABC 는 ∠B = 90° 인 직각삼각형이다.

11. 좌표평면 위의 세 점 $A(4,\ -2)$, $B(1,\ 7)$, $C(-2,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형 ② 이등변삼각형

③ 직각삼각형 ④ 예각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

세변의 길이는

$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + \{7-(-2)\}^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

따라서 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$이고, $\overline{BC} = \overline{CA}$이므로 직각이등변삼각형이다.

12. 점 $A(1,\ 2)$와 $B(-1,\ -2)$를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $C(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

③ $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

④ $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

⑤ $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x+y^2+4y=15\cdots\cdots$㉠

$\overline{AB}=\overline{CA}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-4y=15\cdots\cdots$㉡

㉠ − ㉡에서 $x+2y=0$

$\therefore\ x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $4y^2-4y+y^2+4y=15$

$\therefore\ y^2=3$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=\mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

13. 세 점 $A(6,1)$, $B(-1,2)$, $C(2,3)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하면?

① $(2,-1)$ ② $(2,-2)$ ③ $(3,-2)$

④ $(2,2)$ ⑤ $(1,-2)$

해설

외심의 좌표를 $O(a,b)$라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}$

즉, $\overline{OA^2}=\overline{OB^2}$이므로

$(a-6)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$

$\therefore\ 7a-b=16\cdots$㉠

$\overline{OA}=\overline{OC}$

즉 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$이므로

$(a-6)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$

$\therefore\ 2a-b=6\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=2, b=-2$

$\therefore O(2,-2)$

14. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(-4,3), \mathrm{C}(-1,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 외심의 좌표를 (a,b) 라고 할때, $a+b$ 를 구하면?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ -1 ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O 라 하면
$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$ 이다.
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2+(b-3)^3}$ 에서 $3a-b = -5 \cdots$ ㉠
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b+3)^3}$ 에서 $6a+8b = -5 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면
$a = -\frac{3}{2}$ $b = \frac{1}{2}$
$\therefore\ a+b = -1$

15. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x축 위에 있고, 두 점 A, B의 좌표가 각각 A$(-2, 1)$, B$(3, 4)$일 때, 점 P 의 x좌표는?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$
점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$으로 놓으면
$\sqrt{(a+2)^2+(-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2+(-4)^2}$
양변 제곱하여 정리하면
$a^2+4a+5 = a^2-6a+25,\ 10a=20$
$\therefore\ a=2$

16. 다음은 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

> 직선 BC를 x축, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 잡고, A$(a,\ b)$, B$(-c,\ 0)$, C$(c,\ 0)$라고 하자. (단, $b \neq 0$, $c > 0$)
>
> (i) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
>
> $$y = \boxed{\text{(가)}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
> $$= \boxed{\text{(가)}}\,x + \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉠$$
>
> 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
>
> $$y = -\frac{a+c}{b}x + \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉡$$
>
> 두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $(0, \boxed{\text{(나)}})$에서 만난다. 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
>
> (ii) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때
>
> $\triangle$ABC는 $\boxed{\text{(다)}}$이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
>
> 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

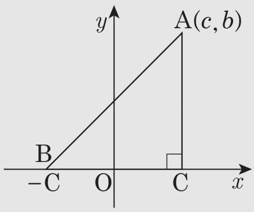
⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\dfrac{b}{a-c}$이므로

변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $\dfrac{b}{a-c}\cdot m = -1$에서 $m = -\dfrac{a-c}{b}$

이다.



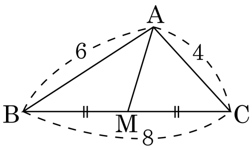
이때, 중점 E$\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$이므로 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
$$= -\frac{a-c}{b}x + \frac{a^2-c^2}{2b} + \frac{b}{2}$$
$$= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right]$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이다.

17. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

18. 좌표평면에 두 점 $A(1,3)$, $B(2,-1)$ 이 있다. 점 $C(m,2)$ 에 대하여 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 가 최소일 때의 m 의 값을 구하면?

① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC}+\overline{BC}$ 가 최소인 경우는
세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때이므로
직선 AB 와 BC 의 기울기가 같다.

따라서 $\frac{-1-3}{2-1}=\frac{2-(-1)}{m-2}$

$\therefore m=\frac{5}{4}$

19. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,3)$, $\mathrm{B}(5,-5)$가 있다. 점 $\mathrm{C}(3,m)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$가 최소일 때, m의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

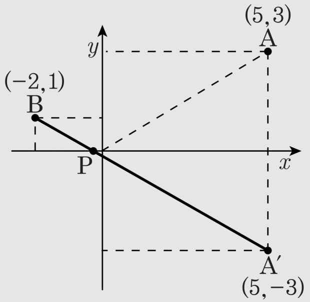
$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$가 최소가 되기 위해서
점 $\mathrm{A,B,C}$는 한 직선 위에 있어야 한다.
따라서 A와 B를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=-2x+5$ 이다.
C는 이 직선 위의 점이므로 대입하면 m은 -1

20. 두 점의 좌표가 A $(5,\ 3)$, B $(-2,\ 1)$이고, x축 위를 움직이는 점 P에 대하여, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소일 때 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}\left(-\frac{3}{4},\ 0\right)$　② $\mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$　③ $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$
④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$　⑤ $\mathrm{P}(1,\ 0)$

해설

A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′라 하면 A′는 $(5,\ -3)$이다.
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 이고, $\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은
점 A′와 점 B를 이은 선분의 길이와 같다.



직선 A′B의 방정식은

$$y+3=\frac{1-(-3)}{-2-5}(x-5),\ y=-\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}$$

이 직선과 x축과의 교점이 점 P이므로

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$$

21. 두 점 $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(4,3)$에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

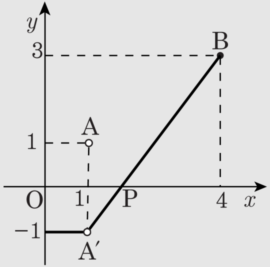
① 5 ② $2\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설

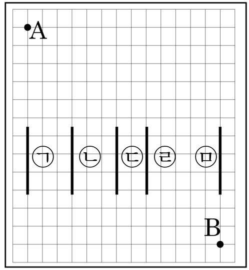
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 A $(1,1)$을 x축에 대해 대칭이동시킨 $\mathrm{A}'(1,\ -1)$과 B $(4,3)$을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25}=5$



22. 다음 그림은 어느 운동장에 있는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 5개의 평균대를 모눈종이에 나타낸 것이다. 동현이가 A 지점에서 출발하여 평균대 위를 걸어서 지나 B 지점까지 도착하는 경기를 하려 한다. 이동 거리를 가장 짧게 하려 할 때, 지나야할 평균대는?

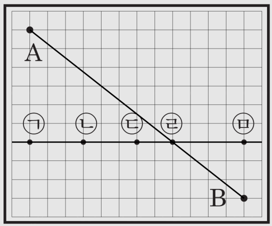


① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

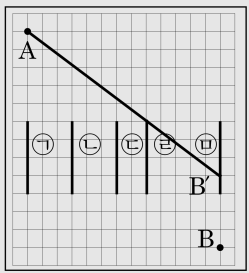
④ ㉣　　⑤ ㉤

해설

각 평균대의 한 끝점을 다른 한 끝점에 오도록 접으면 다음 그림과 같으므로 $\overline{AB}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 걸어서 지날 때 이동거리가 가장 짧다.



평행사변형의 성질을 이용하여 그림과 같이 B 지점에서 위로 4 칸 이동한 지점 B′ 을 잡으면 이동 거리는 A 지점에서 B′ 지점까지 이동한 후 B′ 지점에서 B 지점까지 이동하는 거리와 같다.
이동 거리가 가장 짧은 것은 $\overline{AB'} + \overline{B'B}$ 이므로 $\overline{AB'}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣ 을 지나야 한다.

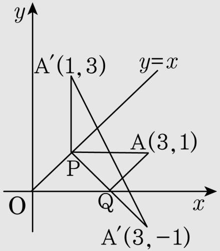


23. 정점 $A(3, 1)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y = x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



점 A

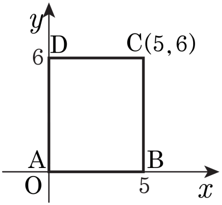
의 x 축에 대한 A'' 라 하면,

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QA''}} ge \overline{\mathrm{A'A''}}$

$\overline{\mathrm{A'A''}} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

24. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,6)$, $D(0,6)$로 이루어진 □ABCD가 있다. $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$를 최소로 하는 점 P의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$　② $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$　③ $(0, 3)$

④ $(5, 0)$　⑤ $(0, 6)$

해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD 의 교점을

P 라 하고 임의의 점 P′ 을 잡으면

$\overline{P'A}+\overline{P'C} \geq \overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC}$

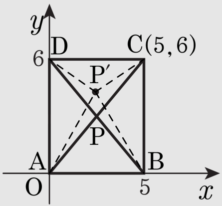
$\overline{P'B}+\overline{P'D} \geq \overline{BD}=\overline{PB}+\overline{PD}$

$\therefore\ \overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+\overline{P'D}$

$\geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

즉, $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 를 최소로 하는

점 P는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 이다.



25. 점 $A(5,-4), B(-1,2)$ 를 잇는 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 중점 M 의 좌표를 (a,b) 라고 하자. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$P\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 5}{1+2}, \frac{1\cdot 2+2\cdot(-4)}{1+2}\right) = (3,\ -2)$$

$$Q\left(\frac{1\cdot(-1)-2\cdot 5}{1-2}, \frac{1\cdot 2-2\cdot(-4)}{1-2}\right) = (11,\ -10)$$

선분 PQ 의 중점 M

$$(a,b) = \left(\frac{11+3}{2}, \frac{-2-10}{2}\right) = (7,\ -6)$$

$\therefore\ a+b=1$

26. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $3:2$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 $\mathrm{B}(a,\ b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3a-2}{3-2},\ \dfrac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 이므로

$3a-2=4 \quad \therefore\ a=2,$

$3b-8=1 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ \mathrm{B}(2,\ 3)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$

27. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1 로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1 로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times3+1\times0}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)=(2,4)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times2-1\times0}{2-1}, \frac{2\times6-1\times0}{2-1}\right)=(4,12)$$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4-2)^2+(12-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$ 이다.

28. 수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분한 점을 C, 외분한 점을 D라 할 때, $\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\square}{\overline{\mathrm{AB}}}$가 성립한다. $\square$ 안에 알맞은 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

네 점의 좌표를 각각 A(0), B(b), C(c), D(d)라 하면

$c=\frac{mb}{m+n},\ d=\frac{mb}{m-n}$

($\because$ A의 좌표가 0)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=c-0=\frac{mb}{m+n}$

$\overline{\mathrm{AD}}=d-0=\frac{mb}{m-n}$

$\overline{\mathrm{AB}}=b-0=b$

$$\therefore \frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{m+n}{mb}+\frac{m-n}{mb}$$

$$=\frac{2m}{mb}=\frac{2}{b}=\frac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

29. 점 $A(1, 3)$, $B(3, 2)$를 잇는 선분과 직선 $x - y + 1 = 0$과의 교점을 P라 할 때, $\overline{AP} : \overline{BP}$는?

① $1 : 1$ ② $1 : 2$ ③ $1 : 3$ ④ $2 : 1$ ⑤ $3 : 1$

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : k$라 하면

P의 좌표는 $\left(\dfrac{k+3}{1+k}, \dfrac{3k+2}{1+k}\right)$이다.

P는 직선 $x - y + 1 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{k+3}{1+k} - \frac{3k+2}{1+k} + 1 = 0,$$

$$k + 3 - (3k+2) + (1+k) = 0 \quad \therefore\ k = 2$$

$$\therefore\ \overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$$

30. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점
A(4, 2), B(0, 3),C(−2, −4) 일 때, 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하면?

① D(1, 5) ② D(2, 1) ③ D(3, 2)
④ D(2, −5) ⑤ D(1, 3)

해설

평행사변형은 밑변과 윗변이 평행하면서 길이가 같다.
따라서 점 A가 B의 좌표보다
x축으로 4만큼, y축으로 −1만큼 이동한 것을
점 C에 적용할 수 있다.
따라서 $D(-2+4, -4+(-1))$
$\therefore$ D(2, −5)

31. 네 점 $A(3,\ 5)$, $B(a,\ 10)$, $C(-1,-1)$, $D(-2,b)$를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 될 때, a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

평행사변형이 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
즉, ($\overline{AC}$의 중점)=($\overline{BD}$의 중점)이므로

$$(\overline{AC}\text{의 중점}) = \left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{5+(-1)}{2}\right) = (1,2)$$

$$= \left(\frac{a+(-2)}{2},\ \frac{10+b}{2}\right)$$

$\dfrac{a+(-2)}{2} = 1$, $\dfrac{10+b}{2} = 2$ 에서 $a=4$, $b=-6$

$\therefore\ a+b=-2$

32. $A(-1,-1)$, $B(5,-2)$, $C(3,3)$ 을 세 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 D 의 좌표는?

① $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ ② $(1, 1)$ ③ $(-3, 4)$

④ $(8, 1)$ ⑤ $\left(4, \frac{1}{2}\right)$

해설

평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로
$\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치
$D(x, y)$ 라 하면

$\overline{AC}$ 의 중점 : $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1, 1)$

$\overline{BD}$ 의 중점 : $\left(\frac{5+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$

$\frac{5+x}{2} = 1, \frac{-2+y}{2} = 1$

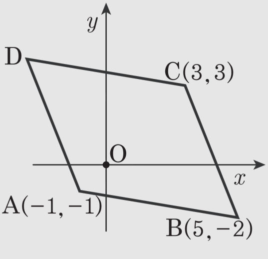
$\therefore \ x = -3, y = 4$

$\therefore \ D(-3, 4)$

해설

B $\rightarrow$ C로 갈 때 x축으로 -2, y축으로 $+5$만큼 이동했으므로
A $\rightarrow$ D로 갈때도 같은 만큼 이동한다.

$\therefore \ D = (-1-2, -1+5) = (-3, 4)$



33. 재질이 고른 삼각형 모양의 널빤지를 좌표평면 위에 놓으니 세 꼭짓점의 좌표가 A$(9, 7)$, B$(2, 3)$, C$(7, 5)$가 되었다. 손가락을 수직으로 세워 이 널빤지를 그 위에 얹을 때 수평이 되도록 하기 위한내부의 한 점의 좌표를 구하면?

① $(4, 5)$　② $(5, 5)$　③ $(5, 6)$　④ $(6, 5)$　⑤ $(6, 6)$

해설

수평이 유지되기 위해선 무게중심에 손가락을 세워야한다.
따라서 무게중심 G는

$$G = \left(\frac{9+2+7}{3}, \frac{7+3+5}{3}\right) = (6,\ 5)$$

34. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $A(-1, 4)$, $B(0, 3)$이고, 무게중심의 좌표가 $G(2, 1)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $(7, -4)$ ② $(3, -6)$ ③ $(5, -5)$

④ $(-1, 8)$ ⑤ $(1, 1)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$C = (x, y)$라 하면

$$\left(\frac{-1+0+x}{3}, \frac{4+3+y}{3}\right) = (2, 1)$$

$\therefore\ x = 7\ \ y = -4$

$\therefore\ C = (7, -4)$

35. 세 꼭짓점이 모두 제 1사분면에 있는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b)이라고 한다. 세 꼭짓점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 할 때, $\overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3}$의 값을 구하면?

① $a+b$ ② $\frac{a+b}{3}$ ③ $\frac{1}{3}b$ ④ $3b$ ⑤ $6b$

해설

$\overline{AH_1} + \overline{BH_2} + \overline{CH_3}$의 값은 꼭짓점 A, B, C의 y 좌표의 합과 같으므로,
세 꼭짓점의 y좌표를 y_1, y_2, y_3라 하자.
무게중심의 공식을 이용하면,

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3} = b$$

$$\therefore\ y_1+y_2+y_3 = 3b$$

36. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1), B(1,3)$ 에 대하여 선분 OA, AB, BO 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $(1, -1)$ ③ $(1, 1)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 0}{2+1},$$

$$y_1 = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 0}{2+1}$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

점 Q, R 도 마찬가지 방법으로 계산하면

$$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}+1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

37. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{P}(1,3)$, $\mathrm{Q}(5,1)$, $\mathrm{R}(4,4)$ 일 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(3,2)$　　② $(3,3)$　　③ $\left(\dfrac{10}{3},2\right)$

④ $\left(\dfrac{10}{3},3\right)$　　⑤ $\left(\dfrac{11}{3},2\right)$

해설

$\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,y_3)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1 로 내분하는 점이 $\mathrm{P}(1,3)$ 이므로

$$\frac{2x_2+x_1}{2+1}=1,\ \frac{2y_2+y_1}{2+1}=3$$

$$\therefore\ 2x_2+x_1=3,\ 2y_2+y_1=9 \qquad \cdots ㉠$$

$\overline{\mathrm{BC}}$를 2 : 1 로 내분하는 점이 $\mathrm{Q}(5,-1)$ 이므로

$$\frac{2x_3+x_2}{2+1}=5,\ \frac{2y_3+y_2}{2+1}=-1$$

$$\therefore\ 2x_3+x_2=15,\ 2y_2+y_1=-3 \qquad \cdots ㉡$$

$\overline{\mathrm{CA}}$를 2 : 1 로 내분하는 점이 $\mathrm{R}(4,4)$ 이므로

$$\frac{2x_1+x_3}{2+1}=4,\ \frac{2y_1+y_3}{2+1}=4$$

$$\therefore\ 2x_1+x_3=12,\ 2y_1+y_3=12 \qquad \cdots ㉢$$

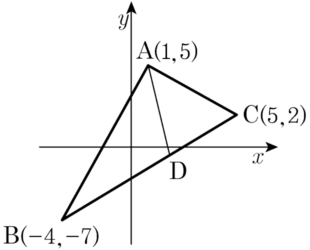
㉠, ㉡, ㉢에서

$$3(x_1+x_2+x_3)=30,\ 3(y_1+y_2+y_3)=18$$

$$\therefore\ (x_1+x_2+x_3)=10,\ (y_1+y_2+y_3)=6$$

따라서 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{10}{3}$, $\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=2$ 이므로 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{10}{3},2\right)$

38. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(−4, −7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

③ $(2,\ -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

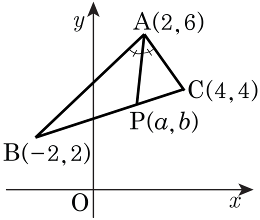
$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$

$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

39. 다음 그림과 같이 세 점 A(2, 6), B(−2, 2), C(4, 4) 를 꼭짓점으로 하는 △ABC 에서 ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 P(a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



① 10　　② 15　　③ 20

④ 25　　⑤ 30

해설

△ABC 에서 ∠A 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 P(a, b) 라 하면
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2+(4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 P(a, b) 는 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.

$$\therefore a = \frac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1} = 2,$$

$$b = \frac{2\cdot 4+1\cdot 2}{2+1} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ 3ab = 3\cdot 2\cdot\frac{10}{3} = 20$$

40. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로

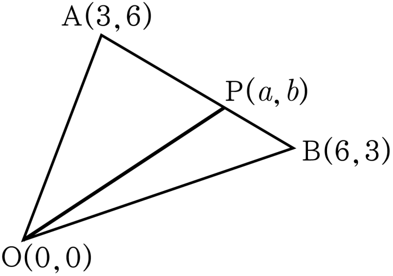
$\triangle\mathrm{OAP} = 2\triangle\mathrm{OBP}$ 이려면

P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.

따라서 $\mathrm{P}\left(\dfrac{12+3}{3}, \dfrac{6+6}{3}\right)$

즉 $\mathrm{P}(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



41. 두 점 $A(3,0)$, $B(0,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x+2y+9=0$

② $3x+2y=0$

③ $6x-4y+9=0$

④ $-3x+2y=0$

⑤ $-6x+4y-5=0$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$에서

$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$

정리하면 $-6x+4y=0$

$\therefore -3x+2y=0$

42. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)

④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

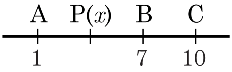
해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3$, $y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

43. 수직선 위의 세 점 $A(1)$, $B(7)$, $C(10)$과 동점 $P(x)$에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?



① $P(5)$ ② $P(6)$ ③ $P(7)$ ④ $P(8)$ ⑤ $P(9)$

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

$= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2$

$= 3(x-6)^2 + 42$

따라서 $x = 6$일 때 최소가 된다.

44. 세 점 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$

$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$

$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$

$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$