1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b,\ b > c$ 이면 $a > c$

② $a > b$ 이면 $a + c > b + c,\ a - c > b - c$

③ $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

④ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

해설

⑤ 반례 $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{b} = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2} < 1$

2. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a > b,\ \ b > c,\ \ c > d$이면 $a > d$

㉡ $a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

㉢ $a > b > 0,\ \ c > d > 0$이면 $ac > bd$

㉣ $ac > bc$이면 $a > b$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $a > b,\ \ b > c$이면 $a > c$

$a > c,\ \ c > d$이면 $a > d$ (참)

㉡ $a > b > 0$이므로 $a - b > 0,\ ab > 0$이다.

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0 \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$(참)

㉢ $c > d$이고 $a > 0$이므로 $ac > ad$

$a > b$이고 $d > 0$이므로 $ad > bd$

따라서 $ac > bd$(참)

㉣ $c < 0$일 때 $ac > bc$이면 $a < b$이다. (거짓)

3. $0 \le x+2y \le 1$, $0 \le -x+y \le 1$일 때 $2x+3y$의 최댓값과 최솟값의 차는 ?

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{array}{rl} & 0 \le x+2y \le 1 \\ +) & \underline{0 \le -x+y \le 1} \\ & 0 \le \ 3y \ \le 2 \cdots\cdots ㉠ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 0 \le \quad x+2y \le 1 \\ -) & \underline{0 \le -2x+2y \le 2} \end{array}$$

$$-2 \le 3x \le 1 \rightarrow -\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{3} \cdots\cdots ㉡$$

㉠ + ㉡ × 2하면

$$\begin{array}{rl} & 0 \le 3y \le 2 \\ +) & \underline{-\frac{4}{3} \le 2x \le \frac{2}{3}} \end{array}$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \le 3y+2x \le \frac{8}{3}$$

$\therefore$ 최댓값 − 최솟값 $= \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4$

4. $|x+1|<4,\ 2<y<4$일 때, $\dfrac{x}{y}$의 범위는?

① $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{5}{4}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{4}$

해설

$|x+1|<4$

$\Rightarrow \quad -4<x+1<4$

$\Rightarrow \quad -5<x<3, \quad 2<y<4$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$ 의 최댓값 : $\dfrac{3}{2}$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$ 의 최솟값 : $-\dfrac{5}{2}$

$\therefore \quad -\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$

5. 일차부등식 $ax - b > 0$의 해가 $x < 2$일 때, $(a-b)x + (2a+3b) > 0$의 해를 구하면?

① $x > 5$ ② $x < 7$ ③ $x > 7$ ④ $x < 8$ ⑤ $x > 8$

해설

부등호의 방향이 반대로 바뀌었으므로 $a < 0$ 이다. $ax - b > 0$

$\Rightarrow \quad x < \frac{b}{a}, \quad \frac{b}{a} = 2$

$2a = b \Rightarrow \quad a < 0, \quad b < 0$

$(a-b)x + (2a+3b) > 0$ 에서 $a - b = -a > 0$

$\therefore \quad x > \frac{-(2a+3b)}{(a-b)}, \quad \frac{-(2a+3b)}{a-b} = \frac{-8a}{-a} = 8$

$\Rightarrow \quad x > 8$

6. 부등식 $3|x-1|+2|x+1|<6$을 풀면?

① $x>-1$ ② $x<\frac{7}{5}$ ③ $1\le x<\frac{7}{5}$

④ $-1<x<\frac{7}{5}$ ⑤ $-3\le x<-1$

해설

$3|x-1|+2|x+1|<6$에서

i) $x<-1$일 때,

$3(-x+1)+2(-x-1)<6 \quad \therefore\ x>-1$

이것은 $x<-1$의 조건에 맞지 않는다.

ii) $-1\le x<1$일 때,

$3(-x+1)+2(x+1)<6 \quad \therefore\ x>-1$

이것과 $-1\le x<1$로 부터

$-1<x<1 \cdots\cdots$ ㉠

iii) $x\ge 1$일 때,

$3(x-1)+2(x+1)<6 \quad \therefore\ x<\frac{7}{5}$

이것과 $x\ge 1$로 부터

$1\le x<\frac{7}{5} \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 해는 $-1<x<\frac{7}{5}$

7. 다음 부등식을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

$$2|x+2|+|x-1| \leq 6$$

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

ⅰ) $x < -2$일 때

$-2(x+2)-(x-1) \leq 6, \quad x \geq -3$

공통부분은 $-3 \leq x < -2$

ⅱ) $-2 \leq x < 1$일 때

$2(x+2)-(x-1) \leq 6, \quad x \leq 1$

공통부분은 $-2 \leq x < 1$

ⅲ) $x \geq 1$일 때

$2(x+2)+(x-1) \leq 6, \quad x \leq 1$

공통부분은 $x = 1$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)를 합하면, $-3 \leq x \leq 1$

$\therefore$ 정수 x의 개수 5개

8. $|x-2| \leq 2x-1$을 만족하는 x의 최솟값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

(ⅰ) $x \geq 2$일 때

$x-2 \leq 2x-1$에서 $-1 \leq x$

따라서 이 범위에서의 해는 $x \geq 2$

(ⅱ) $x < 2$일 때

$-x+2 \leq 2x-1$에서 $1 \leq x$

따라서 이 범위에서의 해는 $1 \leq x < 2$

두 범위에서 구해진 해에 의해 나올 수 있는 x의 최솟값은 1이다.

9. 부등식 $|x-1| \leq 3x-1$의 해를 바르게 구한 것은?

① $x > 0$　② $x \geq 0$　③ $x \geq \frac{1}{2}$

④ $x \geq 1$　⑤ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

해설

(i) $x \geq 1$일 때

$x-1 \leq 3x-1$, $2x \geq 0$이므로 $x \geq 0$ $\therefore$ 조건과의 공통범위는 $x \geq 1$

(ii) $x < 1$일 때

$-(x-1) \leq 3x-1$, $4x \geq 2$, $x \geq \frac{1}{2}$

$\therefore$ 조건과의 공통범위는 $\frac{1}{2} \leq x < 1$

(i), (ii)에서 $x \geq \frac{1}{2}$

10. 부등식 $|x-1| < 2x-3$ 을 풀면?

① $x > 2$ ② $x \geq 2$ ③ $x < 3$ ④ $x \leq 3$ ⑤ $x \leq 2$

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때 $x-1 < 2x-3$ $\therefore x > 2$

(ii) $x < 1$ 일 때 $-x+1 < 2x-3$ $\therefore x > \dfrac{4}{3}$ $x < 1$ 이므로 부적합

(i), (ii) 에서 $x > 2$

11. 부등식 $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right| \leq 1$을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하면?

① 13 개 ② 9 개 ③ 6 개 ④ 4 개 ⑤ 2 개

해설

$$-1 \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-6 \leq 3-2x \leq 6$$

$$-9 \leq -2x \leq 3$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

그런데 x는 자연수 이므로 1, 2, 3, 4이다.

12. 부등식 $|x-k| \leq 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$　② 2　③ $3\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \leq 3$에서 $-3 \leq x-k \leq 3$,

$-3+k \leq x \leq 3+k$

따라서 x의 최댓값은 $3+k$,

최솟값은 $-3+k$이므로

$(-3+k)(3+k)=9$

$k^2-9=9$

$k^2=18 \quad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$

k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

13. 이차부등식 $-4x^2+12x-9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$ 인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2+12x-9 \geq 0$

$\Rightarrow\ 4x^2-12x+9 \leq 0$

$\Rightarrow\ (2x-3)^2 \leq 0$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

14. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.

④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$

$x^2 - 16x + 64 \le 0$

$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad x = 8$

15. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \geq bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면

$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ii) $a>b$이면

$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \geq 0$

$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

16. 이차부등식 $x^2 - |x| - 6 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

① 5 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x \geqq 0$일 때

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x+2)(x-3) < 0$

$-2 < x < 3 \qquad \therefore 0 \leqq x < 3$

$x < 0$일 때

$x^2 + x - 6 < 0$에서 $(x+3)(x-2) < 0$

$-3 < x < 2 \qquad \therefore -3 < x < 0$

$\therefore -3 < x < 3$이므로 $a = -3,\ b = 3$

따라서 $a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$

17. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\frac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

18. 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2-2(k-4)x+4}$가 실수가 되도록 하는 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k \le 2$　② $k \le -1$ 또는 $k \ge 2$

③ $2 \le k \le 6$　④ $k \le 2$ 또는 $k \ge 6$

⑤ $k \ge 6$

해설

근호가 실수가 되려면
근호 속의 수가 양수이어야 한다.
즉, $x^2-2(k-4)x+4 \ge 0$ 을 항상 만족시키면 되므로
판별식 $\dfrac{D}{4} \le 0$이 될 조건을 구하면 된다.

$\dfrac{D}{4} = (k-4)^2 - 4 \le 0$

$k^2-8k+12 \le 0$, $(k-2)(k-6) \le 0$

$\therefore\ 2 \le k \le 6$

19. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \geq 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \leq 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \leq 0$

$\therefore\ k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

$\therefore\ \ k \geq 4(\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

20. 모든 실수 x에 대하여 $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1>0$이 성립할 때 a의 범위를 구하면?

① $a<-\frac{2}{3},\ a\geq 1$ ② $-1<a<1$ ③ $a<-1,\ a>1$
④ $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$ ⑤ $-\frac{5}{3}<\ a<1$

해설

(1) $a=1$일 때
(좌변)$=1>0$이므로 항상 성립한다.
(2) $a\neq 1$일 때
주어진 식이 성립하려면
$a^2-1>0,\ D<0$이어야 한다.
따라서 $a^2-1>0$에서 $(a-1)(a+1)>0$
$\therefore\ a<-1,\ a>1$
또 $D=(a-1)^2-4(a^2-1)<0$에서
$3a^2+2a-5>0,\ (3a+5)(a-1)>0$
$\therefore\ a<-\frac{5}{3},\ a>1$
(1), (2)에서 $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$

21. 이차부등식 $x(x+1) < ax(x+1) - 1$을 만족하는 해가 없을 때, 상수 a값의 범위는?

① $-2 \le a < 1$
② $-2 < a < 1$
③ $-3 \le a < 1$
④ $-3 < a < 1$
⑤ $a < -2$ 또는 $a > 1$

해설

$x^2 + x < ax^2 + ax - 1$에서
$(a-1)x^2 + (a-1)x - 1 > 0$가 해가 없으려면
$a - 1 < 0$, $D \le 0$
$D = (a-1)^2 + 4(a-1) \le 0$
$(a-1)(a+3) \le 0$
$\therefore -3 \le a \le 1$
$a - 1 < 0$에서 $a \ne 1$
$\therefore \ -3 \le a < 1$

22. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-x^2+(k+2)x-(2k+1)\le 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

② $0 \le k \le 4$

③ $k \le -1$ 또는 ≥ 1

④ $-1 \le k \le 1$

⑤ $0 \le k \le 3$

해설

$-x^2+(k+2)x-(2k+1)\le 0$ 에서 $x^2-(k+2)x+(2k+1)\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

이차함수 $y=x^2-(k+2)x+(2k+1)$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-(k+2)x+(2k+1)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

$D=(k+1)^2-4(2k+1)\le 0$

$k^2-4k\le 0$

$k(k-4)\le 0$

$\therefore\ 0\le k\le 4$

23. 다음은 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $m<x<n$ $(m<0,\ n<0)$ 일 때, 부등식 $cx^2+bx+a>0$의 해를 구하는 과정이다.

> $ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)>0$ 에서
> $m<x<n$ 의 해가 나오려면
> a 는 (가)이어야 한다.
> 또, $b=-a(m+n)$, $c=amn$ 이므로
> $cx^2+bx+a>0$ 은 $amnx^2-a(m+n)x+a>0$
> 여기서 a는 (가)이므로
> $mnx^2-(m+n)x+1<0$
> mn 는 (나)이므로 위 식을 mn 로
> 나누어 정리하면$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$
> $\therefore$ (다) $<x<$ (라)

위 풀이 과정 중 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① 양수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
② 음수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
③ 음수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
④ 양수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
⑤ 음수, 양수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$

해설

$a(x-m)(x-n)<0 \iff m<x<n$ 이므로
a 는 음수이어야 한다.
$m<0,\ n<0$ 이므로 $mn>0$
즉, 양수이고 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 이므로
$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0 \iff \frac{1}{n}<x<\frac{1}{m}$

24. x에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-1<x<2$ 일 때, $2cx^2+4bx-a\geq 0$ 의 해를 구하면?

① 모든 실수 ② 해가 없다 ③ $-\frac{1}{2}$

④ $x>-\frac{1}{2}$ ⑤ $x\geq -\frac{1}{2}$

해설

해가 $-1<x<2$ 이므로 a는 음수이다.

$a(x+1)(x-2)>0$

$ax^2-ax-2a>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$이므로

$b=-a,\ c=-2a$

$2cx^2+4bx-a\geq 0 \Leftrightarrow -4ax^2-4ax-a\geq 0$

$-a(-a>0)$ 로 양변을 나누면

$4x^2+4x+1\geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2\geq 0$

$\therefore$ 해는 모든 실수

25. 부등식 $ax^2 - bx - 4 < 0$ 의 해가 $-\frac{1}{2} < x < 4$ 일 때 $a+b$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$ax^2 - bx - 4 < 0$ 의 해가

$-\frac{1}{2} < x < 4$ 이므로 $a > 0$

해가 $-\frac{1}{2} < x < 4$ 이고

이차항의 계수가 1인 부등식은

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4) < 0$$

$$a\left(x^2 - \frac{7}{2}x - 2\right) < 0$$

상수항을 맞추면 $a = 2$

$2x^2 - 7x - 4 < 0$

따라서 $a = 2, b = 7,\ a + b = 9$

26. x 에 대한 이차부등식 $ax^2+5x+b<0$ 의 해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값은?

① -7 ② -3 ③ 3 ④ 7 ⑤ 10

해설

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이므로 $a<0$

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은

$(x-2)(x-3)>0,\ x^2-5x+6>0$

양변에 -1을 곱하면

$-x^2+5x-6<0$

$\therefore a=-1,\ b=-6$

$a+b=-7$

27. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$
$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로
$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은

$$x=\frac{\alpha+1}{4},\ \frac{\beta+1}{4}$$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$
$f(4x-1)=0$에서
$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{4},\ x=\frac{\beta+1}{4},$$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

28. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는 ?

① $-1 < a < 4$

② $-1 < a < 0$ 또는 $3 < a < 4$

③ $-1 \le a \le 4$

④ $-1 < a \le 0$ 또는 $3 \le a < 4$

⑤ $3 \le x \le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \quad \cdots$ ㉠

$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots$ ㉡

㉠에서 허근을 가지려면

$D=a^2-4a<0$

$\therefore\ 0<a<4$

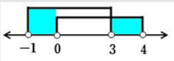
㉡에서 허근을 가지려면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

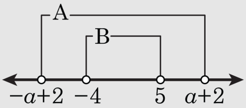
29. 양의 실수 a에 대하여 부등식 $-3 < x+1 < 6$의 모든 해가 부등식 $|x-2| < a$를 만족할 때, a값의 범위는?

① $0 < a \le 3$ ② $0 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

④ $a \ge 3$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$\therefore\ a \ge 6$



30. 둘레의 길이가 $24\,\text{cm}$인 직사각형의 넓이를 $35\,\text{cm}^2$ 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $9\,\text{cm}$ ② $10\,\text{cm}$ ③ $12\,\text{cm}$ ④ $15\,\text{cm}$ ⑤ $19\,\text{cm}$

해설

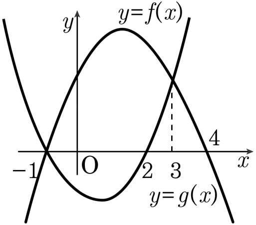
한 변의 길이가 a이므로 다른 한 변의 길이는 $12-a$이다.

$a(12-a) \geq 35$에서 $(a-5)(a-7) \leq 0$

$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $12\,\text{cm}$

31. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \le 0$ 의 해를 구하면?



① $x \le -1$

② $-1 \le x \le 2$

③ $-1 \le x \le 3$

④ $2 \le x \le 3$

⑤ $2 \le x \le 4$

해설

$f(x) - g(x) \le 0$ 에서 $f(x) \le g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \le x \le 3$

32. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots$ ㉠의 해가

$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고

$m(x+1)(x-3) > 0$

$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$

이것이 ㉠과 일치하므로

$n = -2m, \ mn + 2 = -3m$

두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서

$2m^2 - 3m - 2 = 0$, $(2m+1)(m-2) = 0$

$\therefore m = -\frac{1}{2} \ (\because m < 0)$

따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

33. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$　② $-6 < a < -2$　③ $a \geq 3$, $a \leq -1$

④ $a \geq 0$　⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$

$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$

항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$

$\Rightarrow -6 < a < -2$

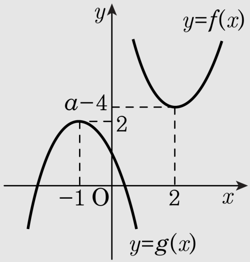
34. 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$ 와 $g(x)=-x^2-2x+1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a>6$　② $a>5$　③ $a>4$　④ $a>3$　⑤ $a>2$

해설

$f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$,
$g(x)=-x^2-2x+1$
$=-(x+1)^2+2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1)>g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로
$a-4>2$ $\quad\therefore\ a>6$



35. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2-6x \ge a^2-6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$　　② $-2 \le a \le 2$　　③ $0 \le a \le 4$

④ $2 \le a \le 4$　　⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore \ 2 \le a \le 4$

36. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$ ② $a > -1$ ③ $a \ge -1$

④ $a < -1$ ⑤ $a \le -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

37. 연립부등식 $\begin{cases} |x-1|<3 & \cdots ㉠ \\ x^2-4x-5 \geq 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \leq 1$

② $x < -2$ 또는 $x \leq 1$

③ $-2 < x \leq -1$

④ $-1 < x \leq 2$

⑤ $-2 < x \leq 3$

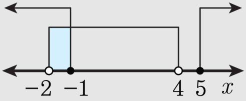
해설

㉠ : $|x-1|<3$

$\rightarrow$ $-3 < x-1 < 3$, $-2 < x < 4$

㉡ : $(x-5)(x+1) \geq 0$

$\rightarrow$ $x \leq -1, x \geq 5$



$\therefore -2 < x \leq -1$

38. 부등식 $2|x-1|+3|x+1|<6$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{7}{5}$ ② $-\frac{4}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

i) $x \geq 1$일 때 $2x-2+3x+3<6$에서
$5x+1<6$이므로 $x<1$
즉 해는 없다.

ii) $-1 \leq x < 1$일 때,
$-2x+2+3x+3<6$에서 $x<1$
즉 $-1 \leq x < 1$

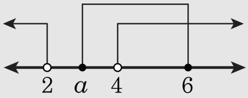
iii) $x<-1$일 때, $-2x+2-3x-3<6$에서
$-5x-1<6$이므로 $x>-\frac{7}{5}$
즉 $-\frac{7}{5}<x<-1$
따라서 해는 $-\frac{7}{5}<x<1$이므로
$a=-\frac{7}{5}$, $b=1$이므로
$a+b=-\frac{2}{5}$

39. 다음 연립방정식의 해가 $4 < x \leq 6$이 되도록 실수 a의 값의 범위를 정할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0 \\ x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0 \end{cases}$$

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



$x^2 - 6x + 8 > 0$에서

$(x-2)(x-4) > 0$

$\therefore x < 2$ 또는 $x > 4$

$x^2 - (a+6)x + 6a \leq 0$에서

$\Rightarrow (x-a)(x-6) \leq 0$

$\therefore$ 두 부등식의 공통부분이 $4 < x \leq 6$ 이 되려면

$(x-a)(x-6) \leq 0$의 해가 $a \leq x \leq 6$이어야 하고,

$2 \leq a \leq 4$ 이어야 한다

$\therefore a$의 최솟값 : 2, 최댓값 : 4

40. 두 부등식 $x^2-4x-5<0$, $x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$x^2-4x-5<0$에서
$(x-5)(x+1)<0$이므로
$-1<x<5$
$x^2-2(a+1)x+a^2+2a<0$에서
$x^2-2(a+1)x+a(a+2)$
$=(x-a)(x-a-2)<0$이므로
$a<x<a+2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
$a+2>-1$
즉 $a>-3$ 또는 $a<5$에서
$-3<a<5$
따라서 정수 a의 개수는 7개다.

41. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ $\therefore\ x>2$ ⋯⋯㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$⋯⋯㉡

㉠,㉡에서 $2<x<4$

$\therefore a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$$

42. 세 변의 길이가 $x-1$, x, $x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

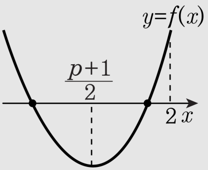
$x-1$, x, $x+1$은 삼각형의 세 변이므로
$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$
$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots$ ①
한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$
$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$ ②
①과 ②에서 $2<x<4$
$\therefore \ a=2, \ b=4$
따라서 $a+b=6$

43. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$　② $\frac{1}{2}<p<1$　③ $1 \le p < 2$
④ $1<p<\frac{4}{3}$　⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$
$p^2+6p-7>0,\ (p+7)(p-1)>0$
$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$
(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$
$3p<4$
$\therefore p<\frac{4}{3}$
(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로
$\frac{p+1}{2}<2$
$\therefore p<3$
(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$
그런데 $p>0$ 이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

44. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

ⅰ) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ⅱ) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

ⅲ) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

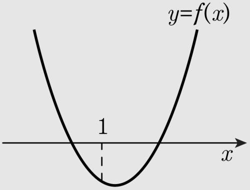
45. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$ ② $m > -2$ ③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$ ⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$

46. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

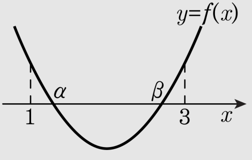
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

47. 이차방정식 $x^2+ax-2=0$ 의 두 실근 α, β에 대하여 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-\frac{13}{3}<a<-1$ ② $-\frac{10}{3}<a<0$ ③ $-\frac{7}{3}<a<1$
④ $-\frac{5}{3}<a<2$ ⑤ $-\frac{2}{3}<a<3$

해설

$f(x)=x^2+ax-2$ 로 놓으면 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이므로
$f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(3)>0$ 이어야 한다.
$f(-2)=-2a+2>0$ 에서 $a<1$
$f(0)=-2<0$
$f(1)=a-1<0$ 에서 $a<1$
$f(3)=3a+7>0$ 에서 $a>-\frac{7}{3}$
$\therefore\ -\frac{7}{3}<a<1$

48. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α,β 가 $-1<\alpha<0,\ 1<\beta<2$ 일 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면 ? (단, $a<0$)

㉠ $c<0$	㉡ $ab<0$
㉢ $a-b+c<0$	㉣ $a+2b+4c>0$

① ㉠ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$로 놓으면

$-1<\alpha<0, 1<\beta<2$ 에서

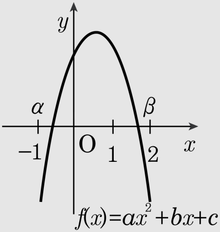
㉠) $f(0)=c>0$

㉡) 꼭짓점의 x좌표가 양이므로 $-\dfrac{b}{2a}>0\ \therefore ab<0$

㉢) $f(-1)=a-b+c<0$

㉣) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c>0,\ \dfrac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore a+2b+4c>0$



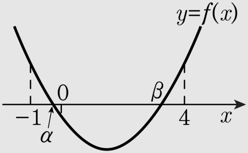
49. 이차방정식 $x^2-4kx+k^2-1=0$의 해를 α,β라 할 때, $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1\le k<1$ ② $-1<k<1$ ③ $-1<k<5$

④ $0<k<1$ ⑤ $0<k<5$

해설

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 근 α,β 가
$-1<\alpha<0<\beta<4$ 를 만족시키므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $f(-1)>0$ 에서 $k^2+4k>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0\cdots$ ㉠

(ii) $f(0)<0$ 에서 $k^2-1<0$

$\therefore -1<k<1\cdots$ ㉡

(iii) $f(4)>0$ 에서 $k^2-16k+15>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>15\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면
$0<k<1$

50. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-4=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a>3$ ② $0<a<3$ ③ $a\geq\frac{1}{2}$

④ $a\geq1$ ⑤ $-1<a<3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1)>0, f(0)<0, f(1)<0, f(2)>0$ 이어야 한다.

따라서 $f(-1)=a+(a+1)-4>0$ 에서

$2a>3 \quad \therefore\ a>\frac{3}{2}\cdots$ ㉠

$f(2)=4a-2a-2-4>0$ 에서

$2a>6 \quad \therefore\ a>3\cdots$ ㉡

㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로

구하는 a의 값의 범위는 $a>3$