1. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$
② $M=3, m=-3$
③ $M=6, m=0$
④ $M=6, m=-6$
⑤ $M=6, m=-12$

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$
$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$
$\therefore M=6,\ m=-6$

2. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$　　② $P \cup Q^c$　　③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$　　⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

'$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \varnothing$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

3. 다음 <보기1>의 명제와 <보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
Ⅱ. $A \subset B$ 와 동치이다.
Ⅲ. $A \cap B = \phi$ 와 동치이다.

보기2

가. $A \cap (A \cup B) = A$
나. $A \cap B = A$
다. $A \cap B^c = A$

① Ⅰ-가, Ⅱ-나, Ⅲ-다
② Ⅰ-가, Ⅱ-다, Ⅲ-나
③ Ⅰ-나, Ⅱ-가, Ⅲ-다
④ Ⅰ-나, Ⅱ-다, Ⅲ-가
⑤ Ⅰ-다, Ⅱ-가, Ⅲ-나

해설

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$
$\therefore \quad A \cap (A \cup B) = A$
따라서 Ⅰ-가
Ⅱ. $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$ 따라서, Ⅱ -나
Ⅲ. $A \cap B^c = A \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \phi$ 따라서, Ⅲ -다

4. 다음 명제 중에서 참인 것의 개수는?

㉠ 정수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

㉡ $xy \neq 6$ 이면 $x \neq 2$ 이거나 $y \neq 3$ 이다.

㉢ $x,\ y$ 가 실수일 때, $x+y>0$ 이면 $x>-1$ 또는 $y>1$ 이다.

㉣ $x+y$ 가 유리수이면 $x,\ y$ 중 적어도 하나는 유리수이다.

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉢의 경우 그 대우를 적어 보면
㉠의 대우 : 정수 n 에 대하여, n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.
㉡의 대우 : $x=2$ 이고 $y=3$ 이면 $xy=6$ 이다.
㉢의 대우 : $x,\ y$ 가 실수일 때, $x \leq -1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x+y \leq 0$ 이다. 이것은 모두 참임을 알 수 있다.
㉣의 반례 ; $x=\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 가 유리수지만 $x,\ y$ 는 모두 무리수이다.

5. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 의 진리집합을 $P,\ Q,\ R$ 이라 할 때, $P-Q=R$ 을 만족한다. 다음 <보기> 중 항상 참인 명제를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $r \rightarrow \sim q$　㉡ $r \rightarrow p$　㉢ $r \rightarrow q$

㉣ $\sim r \rightarrow \sim p$　㉤ $p \rightarrow q$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉤

④ ㉢, ㉣, ㉤　⑤ ㉡, ㉣, ㉤

해설

$P-Q=R$

따라서, $R \subset P$ 이고 집합간의 관계를 살펴보면

$Q=R^c, R=Q^c$ 이 된다.

이를 명제로 표현하면 $r \rightarrow p, q \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim q$ 이므로 참인 명제는 ㉠, ㉡이다.

6. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\|x-2\| < a$ (단, $a > 0$)
q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

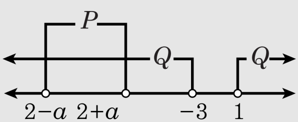
$|x-2| < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore$ $2-a < x < 2+a$ $\therefore$ $P = \{x|2-a < x < 2+a\}$, $Q = \{x|x < -3$ 또는 $x > 1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ $\cdots$ ㉡,

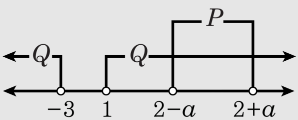
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$

그런데 $a > 0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \leq 1$

㉠ :



㉡ :



$\therefore$ $\alpha = 0,\ \beta = 1$

$\therefore$ $\alpha + \beta = 1$

7. 다음 [보기] 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건이 아닌 것은?

보기

㉠ $p : x^2 + y^2 = 0,\ \ q : xy = 0$

㉡ $p : x^2 = 16,\ \ q : x = 4$

㉢ $p : x, y$는 유리수, $q : x + y, xy$는 유리수

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x^2 + y^2 = 0 \to x = 0$ 그리고 $y = 0$

$xy = 0 \to x = 0$ 또는 $y = 0$

$P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 '충분조건'

㉡ $x^2 = 16 \to x = \pm 4$

$Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 '필요조건'

㉢ x, y 는 유리수 $\to x + y, xy$ 는 유리수,

p 는 q 이기 위한 '충분조건'

반례 : $x = 1 + \sqrt{2},\ \ y = 1 - \sqrt{2}$

$\to\ \ x + y = 2,\ \ xy = -1$

8. 다음에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, a, b, c는 실수)

① $p : a = 1, b = 1,\ q : a + b = 2\ , ab = 1$

② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b,\ q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0,\ q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0,\ q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

ⓛ 충분조건 ⓒ 충분조건 ⓡ 충분조건
ⓜ 충분조건 $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

9. $a \le x \le 6$은 $2 \le x \le 5$이기 위한 필요조건이고, $b \le x \le 4$은 $2 \le x \le 5$이기 위한 충분조건일 때 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\{x|2 \le x \le 5\} \subset \{x|a \le x \le 6\}$

$\therefore a \le 2$

$\{x|b \le x \le 4\} \subset \{x|2 \le x \le 5\}$

$\therefore 2 \le b$

a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 2

$\therefore 2 + 2 = 4$

10. 다음 ㉮, ㉯에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

네 조건 p, q, r, s에 대하여 p 는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건일 때, s는 p이기 위한 (㉮) 조건이며 p는 q이기 위한 (㉯) 조건이다.

① 필요, 필요
② 필요, 충분
③ 충분, 필요
④ 충분, 충분
⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건 p, q, r, s를 만족하는 집합은 각각 P, Q, R, S 라고 하면

$p \subset R,\ Q \subset R,\ S \supset R,\ Q \supset S,\ P \subset R,\ R \subset S$ 이므로 $P \subset S$

따라서 S 는 r이기 위한 필요조건이다.

$Q \subset R,\ R \subset S,\ S \subset Q$이므로 $Q = R = S$

$P \subset R$이므로 $P \subset Q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

11. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a > 0,\ b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$

③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$

④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \le |a| - |b|$

⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면

$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{ab} > 0$ (참)

② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.

③ : (반례) $a = 0,\ b = 0$

12. $a>0, b>0$ 일 때, $\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+9b\right)$ 의 최솟값은?

① 13　② 17　③ 21　④ 25　⑤ 27

해설

$$\left(4a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+9b\right) = 4+36ab+\frac{1}{ab}+9$$
$$= 13+36ab+\frac{1}{ab}$$

$ab>0$, $\frac{1}{ab}>0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$36ab+\frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{36ab \times \frac{1}{ab}} = 12$$

$\therefore$ 최솟값은 $13+12=25$

13. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$$

$$\therefore \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c} \geq 6$$

14. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0,\ b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

15. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

16. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore$ $x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

17. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore \; M+n=5+(-5)=0$

18. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1　② 0　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

19. 제곱의 합이 일정한 두 실수 x, y에 대하여 $2x+3y$의 값이 최대일 때, x와 y사이의 관계는?

① $x=y$ ② $2x=3y$ ③ $3x=2y$

④ $x=y^2$ ⑤ $x^2=y^2$

해설

$x^2+y^2=k$라 하면

$(x^2+y^2)(2^2+3^2) \geq (2x+3y)^2$

($\because$코시-슈바르츠 부등식에 의하여)

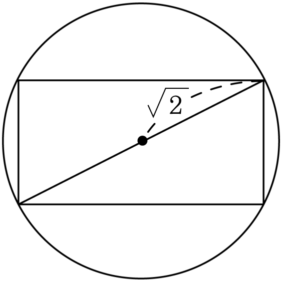
$\therefore 13k \geq (2x+3y)^2$

$\therefore -\sqrt{13k} \leq 2x+3y \leq \sqrt{13k}$

이 때, 등호는 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$일 때 성립하므로

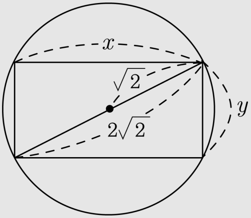
$3x=2y$

20. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

21. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=4$가 성립할 때, 실수 c의 최솟값과 최댓값의 합을 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$a+b+c=2 \Rightarrow a+b=2-c$

$a^2+b^2+c^2=4 \Rightarrow a^2+b^2=4-c^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$2(4-c^2) \geq (2-c)^2$

$8-2c^2 \geq 4-4c+c^2$

$3c^2-4c-4 \leq 0$

$(c-2)(3c+2) \leq 0,$

$-\frac{2}{3} \leq c \leq 2$

$\therefore$ c의 최댓값 : 2, 최솟값 : $-\frac{2}{3}$

합 : $2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

22. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$	㉡ $g : x \rightarrow x+2$
㉢ $h : x \rightarrow |x|+1$	㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$
㉤ $j : x \rightarrow |x|+3$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1+2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2+2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

23. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$ 이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다. ② (나) 1

③ (다) 자연수 ④ (라) 3 의 배수이다.

⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$

따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다.}}$

그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$ 이다.

24. 함수 f, g가 모두 자연수 n에 대하여 $f(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 2f(n-1) & (n \neq 1) \end{cases}$

$g(n) = \begin{cases} 3g(n+1) & (n \neq 3) \\ f(n) & (n = 3) \end{cases}$ 으로 정의될 때 $g(1)$ 의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 18 ⑤ 36

해설

$$\begin{aligned} g(1) &= 3g(2) = 3\,[3g(3)] = 3\,[3f(3)] \\ &= 3\,[3 \cdot 2f(2)] = 3\,[3 \cdot 2 \cdot 2f(1)] \\ &= 3\,[3 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1)] = 36 \end{aligned}$$

25. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

(ⅰ) A 형인 사람은 B 형이 아니다. (ⅱ) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다. (ⅲ) C 형인 사람은 D 형이 아니다. (ⅳ) E 형인 사람은 B 형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 <u>않는</u> 것을 보기에서 <u>모두</u> 고르면?

보기

㉠ A 형인 사람은 E 형이 아니다.

㉡ E 형인 사람은 C 형이 아니다.

㉢ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ) 를 명제로 표현하면

$A \Rightarrow \sim B$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $C \Rightarrow \sim D$, $E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면

(ⅰ) 의 대우 : B형이면 A형이 아니다.

즉, $B \Rightarrow \sim A$

(ⅱ) 의 대우 : B형이면 C형이다.

즉, $B \Rightarrow C$

(ⅲ) 의 대우 : D형이면 C형이 아니다.

즉, $D \Rightarrow \sim C$

(ⅳ) 의 대우 : B형이 아니면 E형이 아니다.

즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$

$E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,

즉, $A \Rightarrow \sim E$

$\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,

즉, $E \Rightarrow C$

$D \Rightarrow \sim C$, $\sim C \Rightarrow \sim B$, $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$

따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.