1. 집합 $A = \{n \mid n$은 10 이하인 자연수$\}$의 진부분집합 중 10보다 작은 소수가 모두 들어 있는 진부분집합의 개수를 구하면?

① 16개 ② 31개 ③ 32개 ④ 63개 ⑤ 64개

해설

10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 주어진 집합은 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$을 반드시 포함하면서 진부분집합이어야 하므로 $2^{10-4} - 1 = 2^6 - 1 = 63$(개)

2. 두 집합
$A = \{x \mid x$는 28의 약수$\}$,
$B = \{1,\ 2,\ 14,\ 28,\ a,\ b\}$
에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.
$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\}$ 이고
$B = \{1,\ 2,\ 14,\ 28,\ a,\ b\}$ 이므로
$a + b = 4 + 7 = 11$ 이다.

3. 두 집합 $A = \{4, 5, a-1\}, B = \{b-3, 6, 8\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 6\}$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$A \cap B = \{4, 6\}$ 이므로 $\{4, 6\} \subset \{4, 5, a-1\}, \{4, 6\} \subset \{b-3, 6, 8\}$ 이다.
그러면 $a-1 = 6, b-3 = 4$ 가 되어 $a = 7, b = 7$ 이다.
따라서 $\frac{b}{a} = \frac{7}{7} = 1$ 이다.

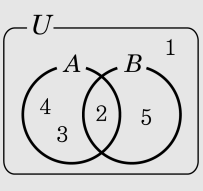
4. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{3, 4\}$, $B - A = \{5\}$, $A^c \cap B^c = \{1\}$ 일 때, 집합 A 는?

① $\{2\}$　　② $\{3\}$　　③ $\{2, 3\}$

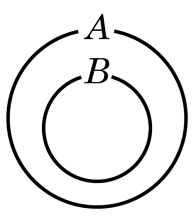
④ $\{2, 4\}$　　⑤ $\{2, 3, 4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $A = \{2, 3, 4\}$ 이다.



5. 다음 벤 다이어그램과 관계가 <u>없는</u> 것은?



① $A \cup B = A$　② $A - B = \varnothing$　③ $A \cap B = B$

④ $B \subset A$　⑤ $B - A = \varnothing$

해설

② $B - A = \varnothing$

6. 전체집합 U의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$에 대하여, $(A-B)^c-B$를 간단히 한 것을 다음 중 고르면?

① $(A\cup B)^c$　② $(A\cup B)$　③ $A\cap B^c$
④ $A^c\cup B$　⑤ $A^c\cup B^c$

해설

$(A-B)^c-B=(A\cap B^c)^c\cap B^c=(A^c\cup B)\cap B^c=(A^c\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$
$=(A\cup B)^c\cup\varnothing=(A\cup B)^c$

7. n 이 자연수이고 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x = 2\times n\}$, $B = \{x \mid x = 2\times n+1\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $1 \notin B$ ② $4 \in A$ ③ $7 \notin A$ ④ $8 \notin A$ ⑤ $7 \in B$

해설

집합 A 의 원소는 $2,\ 4,\ 6,\ \cdots$ 이고 집합 B 의 원소는 $3,\ 5,\ 7, \cdots$ 이므로 $8 \in A$ 이다.

8. 집합 $A = \{(x,\ y) | ax - by = 12\}$에 대하여 $(6,\ 2) \in A$, $(-3,\ -2) \in A$ 일 때, $a + b$의 값은?

① 12　　② 16　　③ 20　　④ 26　　⑤ 30

해설

$(6,\ 2) \in A$이므로 $x = 6$, $y = 2$
$6a - 2b = 12,\ 3a - b = 6 \cdots$ ㉠
$(-3,\ -2) \in A$이므로 $x = -3,\ y = -2$
$-3a + 2b = 12 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $b = 18$
㉠에서 $3a - 18 = 6 \therefore\ a = 8$
$\therefore\ a + b = 26$

9. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 24의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 $\square$의 배수$\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$\square$는 24 의 약수이다.
24 의 약수 : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

10. 집합 X가 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$의 부분집합일 때, $\{a,\ b\} \cup X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$를 만족하는 집합 X의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

$\{a,\ b\} \cup X = \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow X$ 는 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$의 부분집합 중 $c,\ d$를 항상 원소로 가지는 집합이다. $\therefore\ 2^{4-2} = 2^2 = 4$

11. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 24의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 20미만의 소수$\}$, $C = \{x \mid x$는 16의 약수$\}$ 에 대하여 $(A \cap C) \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 90

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이다.
먼저 집합 A 와 C 의 교집합을 구하면 $\{1, 2, 4, 8\}$ 이다.
$(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 19\}$ 이다.
따라서 모든 원소의 합은 $1+2+3+4+5+7+8+11+13+17+19 = 90$ 이다.

12. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 18$, $n(B) = 35$이고, $A \cap B = A$일 때, $n(A \cup B) - n(A \cap B)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$A \cap B = A$이므로 $A \subset B$이고, $A \cup B = B$ 이다.
$n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(B) - n(A) = 35 - 18 = 17$

13. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x|x$는 짝수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 5의 배수$\}$ 에 대하여 $(A \cup B)^c \subset X, (A - B)^c \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{5, 10\}$ 이고 $(A \cup B)^c = \{1, 3, 7, 9\}, (A - B)^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $(A \cup B)^c \subset X \subset (A - B)^c$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$(개) 이다.

14. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U) = 60$, $n(A) = 36$, $n(A \cap B) = 11$, $n(A^c \cap B^c) = 14$일 때, $n(B)$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 14$,
$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 60 - 14 = 46$,
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,
$46 = 36 + n(B) - 11$
$\therefore\ n(B) = 21$

15. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$a \in A$ 이면 $\frac{a}{a-1} \in A$ (단, $a \neq 1$)

① 0　　② $\frac{1}{2}$　　③ $-\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$

$-1 \in A$ 이면 $\frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \cdots$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

16. 다음 집합 중에서 무한집합인 것을 모두 고르면?

① $\{x \mid x$는 5의 배수$\}$

② $\{x \mid x$는 100이하의 홀수$\}$

③ $\{x \mid x$는 $x \geq 5$인 수$\}$

④ $\{x \mid x$는 $0 < x < 1$인 분수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 $6 < x < 7$인 자연수$\}$

해설

① $\{5,\ 10,\ 15,\ 20, \cdots\}$ 무한집합
② $\{1,\ 3,\ 5,\ 7, \cdots,\ 97,\ 99\}$ 유한집합
③ $\{5,\ 6,\ 7,\ 8, \cdots\}$ 무한집합
④ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ 무한집합
⑤ 공집합

17. 두 집합 $A = \{0,\ 1,\ \{\varnothing\},\ \{0,\ 1,\ \varnothing\}\}$, $B = \{a,\ b,\ \{a,\ b,\ c\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하면?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
$n(A) = 4, n(B) = 3$ 이므로 $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

18. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A = \{1,\ 4,\ 5,\ 7, 8\}$, $A \cap B = \{1,\ 4,\ 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

① 2 개　② 4 개　③ 8 개　④ 16 개　⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7 을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8$(개) 이다 .

19. 집합 $A_n = \{x \mid 2n-1 \le x \le 5n+1\}$에 대하여 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \ne \varnothing$가 성립하는 자연수 n의 최댓값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$A_1 = \{x|1 \le x \le 6\}$

$A_n = \{x|2n-1 \le x \le 5n+1\}$

$\therefore 2n-1 \le 6 \Rightarrow n \le \frac{7}{2}$

따라서 자연수 n의 최댓값은 3

해설

$A_1 = \{x \mid 1 \le x \le 6\}$, $A_2 = \{x \mid 3 \le x \le 11\}$, $A_3 = \{x \mid 5 \le x \le 16\}$, $A_4 = \{x \mid 7 \le x \le 21\}$ 이상에서 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$

$\therefore$ n의 최댓값은 3

20. 한 문제에 10점인 주관식 세 문제를 50명의 학생에게 풀도록 하였다. 1번을 푼 학생이 29명, 1번은 풀고 2번을 풀지 못한 학생이 15명, 1번과 2번을 모두 풀지 못한 학생이 20명, 3번을 풀지 못한 학생이 5명이었다. 이 학생들의 주관식 문제의 평균 점수를 구하여라.(단, 소수 첫째자리까지 구하여라.)

▶ 답 : _____ 점

▷ 정답 : 17.8 점

해설

1, 2, 3번을 푼 학생들의 집합을 차례로 A, B, C 라고 하면 1번은 풀고 2번은 풀지 못한 학생의 집합은 $A \cap B^c$, 1번과 2번을 모두 풀지 못한 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$, 3번을 풀지 못한 학생의 집합은 C^c

$n(A) = 29,\ n(A \cap B^c) = 15,\ n(A^c \cap B^c) = 20,\ n(C^c) = 5$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 50 - 20 = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(B) &= n(A \cup B) - n(A \cap B^c) \\ &= 30 - 15 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(C) &= n(U) - n(C^c) \\ &= 50 - 5 = 45 \end{aligned}$$

따라서 구하는 평균 점수는

$$\frac{10 \times n(A) + 10 \times n(B) + 10 \times n(C)}{n}$$

$$= \frac{10 \times 29 + 10 \times 15 + 10 \times 45}{50}$$

$$= 17.8$$