

1. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① $x^2 + 5x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근 을 가진다.
- ② $x^2 + 5 = 0$ 는 두 허근을 가진다.
- ③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$ 은 중근을 가진다.
- ④ $k \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다
- ⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$ 일 때만 중근을 가진다.

해설

- ① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$
 - ② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$
 - ③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m - 4) = 0$
 - ⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0, a = 9$
- $\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2 - k) = k - 1 > 0 \therefore k > 1$

2. x 에 대한 이차방정식 $2mx^2 + (5m+2)x + 4m+1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}, -2$

② $-\frac{7}{12}, -\frac{1}{2}$

③ $-\frac{7}{2}, 2$

④ $-\frac{2}{7}, 2$

⑤ $\frac{2}{7}, \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이므로

$$D = (5m+2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (4m+1) = 0$$

$$25m^2 + 20m + 4 - 32m^2 - 8m = 0$$

$$7m^2 - 12m - 4 = 0$$

$$(7m+2)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{7} \text{ 또는 } 2$$

3. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

㉠ $3x^2 - x - 1 = 0$	㉡ $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
㉢ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$	㉣ $x^2 - x + 2 = 0$

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

- ㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.
- ㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- ㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

4. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 허근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k \leq 3$ ② $k > 3$ ③ $k \leq 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$$3x^2 - 6x + k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$$

$$\therefore k > 3$$

5. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

- $\textcirc� \quad ax^2 + 2bx + c = 0$

$\textcirc� \quad ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$
- $\textcirc� \quad cx^2 + bx + a = 0$

- ① $\textcirc�$

② $\textcirc�, \textcirc�$

③ $\textcirc�, \textcirc�$
- ④ $\textcirc�, \textcirc�$

⑤ $\textcirc�, \textcirc�, \textcirc�$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$D = b^2 - 4ac > 0 \cdots$$

$\textcirc� \quad ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은

$$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$$

$$= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\textcirc�$ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때

$x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만

$$x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0\text{은 허근을 갖는다.}$$

$\textcirc� \quad cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

6. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

8. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2(m + a - 2)x + m^2 + a^2 - 3b = 0$ 이 m 에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a + 3b$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

$$x^2 + 2 \cdot (m + a - 2)x + (m^2 + a^2 - 3b) = 0$$

중근을 가지려면 $\frac{D}{4} = 0$

$$(m + a - 2)^2 - 1 \cdot (m^2 + a^2 - 3b) = 0$$

m 에 대한 항등식이므로

정리해서 m 으로 묶으면,

$$m \cdot (2a - 4) + (4 - 4a + 3b) = 0$$

$$a = 2, 3b = 4a - 4 = 4$$

$$\therefore a + 3b = 6$$

9. 이차식 $x^2 - 2(k - 1)x + 2k^2 - 6k + 4$ 가 x 에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k - 1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
 $-k^2 + 4k - 3 = 0$
 $k^2 - 4k + 3 = 0$
 $(k - 1)(k - 3) = 0$ 에서
 $k = 1$ 또는 $k = 3$

10. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① 1
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 3

해설

(주어진 식)=0이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식($=D$)이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$