1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 14

해설

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

2. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$
$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$
(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

4. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

5. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore$ $x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 -1, 2이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

6. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

7. 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=2$

해설

$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에서

$3x+2y=7$ ⋯⋯㉠

$\frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5}$ 에서

$5x-2z=11$ ⋯⋯㉡

$x+2y+3z=7$ ⋯⋯㉢

㉠ − ㉢을 하면 $2x-3z=0$ ⋯⋯㉣

㉡ × 3 − ㉣ × 2를 하면 $11x=33$

$\therefore x=3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=-1$, $z=2$

8. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p < q$ ② $p^2 \leq q$ ③ $p \leq q^2$

④ $p^2 \leq 4q$ ⑤ $p^2 \geq 4q^2$

해설

모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \geq 0$이 항상 성립하려면
x에 대한 이차방정식 $x^2+pxy+qy^2=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(py)^2-4qy^2 \leq 0$
$(p^2-4q)y^2 \leq 0 \cdots$ ㉠
㉠이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면
$p^2-4q \leq 0$이어야 한다.
$\therefore p^2 \leq 4q$

9. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

10. x에 관한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$에서 $a^2\geq 3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= (-2a)^2-2(9-2a^2)\\ &= 4a^2-18+4a^2=8a^2-18\end{aligned}$$

$\therefore a^2+\beta^2\geq 8\times 3-18=6$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 6

11. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$

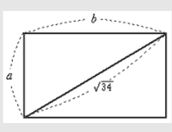
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

12. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b,\ b > c,\ c > d$이면 $a > d$

② $a > b > 0,\ c > d > 0$이면 $ac > bd$

③ $a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

④ $ac > bc$이면 $a > b$

⑤ $a > b > 0,\ c > 0$이면 $\frac{a}{b} > \frac{a+b}{b+c}$

해설

① $a > b,\ b > c$이면 $a > c$
$a > c,\ c > d$이면 $a > d$ ∴참

② $c > d$이고 $a > 0$이므로 $ac > ad$ ……㉠
$a > b$이고 $d > 0$이므로 $ad > bd$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $ac > bd$ ∴참

③ $a > b > 0$이므로 $a - b > 0,\ ab > 0$이다. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0$
이므로 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ∴참

④ $c < 0$일 때 $ac > bc$이면 $a < b$이다. ∴거짓

⑤ $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)}$
$= \frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$ ∴ 참

13. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면
$1 \le -x \le 2$
다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$
각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$
각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$
$\therefore p = 3, q = 4$
$\therefore pq = 12$

14. 부등식 $|x+1|+|x-2|<x+2$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -4　　② -2　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2)<x+2, -x+1-x<x+2$

$-3x<1, x>-\frac{1}{3}$ 따라서 해가 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때

$(x+1)-(x-2)<x+2$

$x+1-x+2<x+2,\ x>1$

$\therefore 1<x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

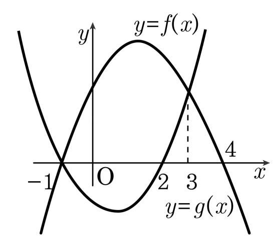
$(x+1)+(x-2)<x+2\ \therefore x<3$

$\therefore 2\le x<3$

(i), (ii), (iii)에서 해는 $1<x<3$

$\therefore \alpha+\beta=4$

15. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해를 구하면?



① $x \leq -1$　　② $-1 \leq x \leq 2$

③ $-1 \leq x \leq 3$　　④ $2 \leq x \leq 3$

⑤ $2 \leq x \leq 4$

해설

$f(x) - g(x) \leq 0$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \leq x \leq 3$

16. x 에 관한 연립방정식

$\begin{cases} |x+4| > 3x \\ 2x(x-3) \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x \le 0$　　② $-2 < x < 3$　　③ $x < 0, x > 2$

④ $0 < x < 2$　　⑤ $x \ge 3$

해설

$\begin{cases} |x+4| > 3x & \cdots ㉠ \\ 2x(x-3) \ge 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠식에서

ⅰ) $x \ge -4$ 일때

$x+4 > 3x \rightarrow 2x < 4 \rightarrow x < 2$

$\Rightarrow -4 \le x < 2$

ⅱ) $x < -4$ 일때

$-x-4 > 3x \rightarrow 4x < -4 \rightarrow x < -1$

$\therefore x < -4$

ⅰ), ⅱ) 에서 $x < 2$

㉡식에서 $2x(x-3) \ge 0 \rightarrow x \ge 3$, $x \le 0$

㉠과㉡ 공통범위 : $x \le 0$

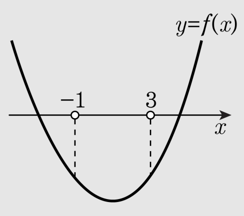
17. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3 이다.

18. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i)+b(1-i), i = \sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$ ② $2+3i$ ③ $4-2i$

④ $-3+2i$ ⑤ $2-5i$

해설

$z = (a+b)+(a-b)\,i$ (a,b 는 양수)

① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$

$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$

$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$

$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

19. 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 $a,\ b$라 할 때 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}$의 값은?

① 4　② 1　③ $\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 6

해설

$x^2-4x+1=0$에서 $\frac{D}{4}=(-2)^2-1=3>0$ 이므로

$a,\ b$ 는 서로 다른 실수이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=4,\ ab=1$ 이므로 $a>0,\ b>0$

$a,\ b$를 식에 대입하면

$a^2-4a+1=0,\ b^2-4b+1=0$

$\therefore a^2+1=4a,\ b^2+1=4b$

$\therefore \sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}=\sqrt{4a}+\sqrt{4b}$

$=2(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\because a>0,\ b>0)$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$

$=6(\because a+b=4, ab=1)$

$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{6}$

20. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$

21. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$
$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$
$abc \neq 0,\quad abc = 1,$
$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$
$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$
그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.
$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1,1,1),\ (1,-1,-1),\ (-1,1,-1),\ (-1,-1,1)$

22. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 2+$ ③ 하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because$ b는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because$ a는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

23. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$라 할 때, $f(x, y) = 0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$
주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면
$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로
근의 공식에서 근호 안의 식$(= D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.
$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$
$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (\mathrm{i})$
(ⅰ)이 완전제곱식이어야 하므로
(ⅰ)의 판별식
$\frac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$
$108 + 36k = 0 \qquad \therefore\ k = -3$

24. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 p, q $(-1<p<0<q<1)$라 하자. 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 해를 $r, s(r<s)$라 할 때, p, q, r, s의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $p<q<r<s$

② $r<s<p<q$

③ $p<r<s<q$

④ $r<p<q<s$

⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

따라서, $r+s=\frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{p+q}{pq}$

$=\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots$ ㉠

$rs=\frac{a}{c}=\frac{1}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\{r,\ s\}=\left\{-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{q}\right\}$

$-1<p<0$에서 $-\frac{1}{p}>1$, $0<q<1$ 에서 $-\frac{1}{q}<-1$

$\therefore\ r=-\frac{1}{q}<-1<p<q<1<-\frac{1}{p}=s$

25. $O(0,\ 0)$, $A(7,\ 1)$, $B(5,\ 5)$ 라 할 때, $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$, 그 때의 최솟값을 r 라 할 때, $\alpha + \beta + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 46

해설

$\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$

$= x^2 + y^2 + (x-7)^2 + (y-1)^2 + (x-5)^2 + (y-5)^2$

$= 3(x-4)^2 + 3(y-2)^2 + 40$

$(x-4)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$ 이므로

$x = 4,\ y = 2$ 에서 최솟값 $r = 40$ 을 갖는다.

$\therefore\ \alpha + \beta + r = 46$