

1. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

- ① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$

$$= (x - 1) \{ a(x - 1) + b \} + c$$

1	3	2	1	
		3	5	
1	3	5	6	← c
		3		
	3	8		← c
	↑			
	a			

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 6$$

$$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$$

$$\rightarrow (x - 1)(3x + 5) = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$$

$$\rightarrow \text{양변을 } x - 1 \text{ 로 나누면}$$

$$3x + 5 = a(x - 1) + b = ax - a + b$$

$$\therefore a = 3, b = 8$$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

2. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2 + 4ix - 4) = x^2i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2 - 4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$$\therefore x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

3. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$$1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$$

$$3 + (a-6)i = (b-2) - ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = b-2, a-6 = -a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b=5, a=3$$

$$\therefore a+b=8$$

4. $\frac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y = -1$

해설

$$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$$

$$1-2i = x+yi$$

$$x = 1, y = -2, x+y = -1$$

5. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 10 ③ 20 ④ -10 ⑤ -20

해설

$$\begin{aligned}x + y &= 6, \quad xy = 12 \\x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\&= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\&= 0\end{aligned}$$

6. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$

② $-2x+1$

③ 3

④ -3

⑤ $x+1$

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 을 만족하려면,}$$

$a < 0, b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0, x-2 < 0, -1 \leq x < 2, x \neq -1, x \neq 2$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1 - x + 2 = 3$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$ 로 나눈 나머지가 -1 일 때, $(x^2+x+2)f(x)$ 를 x^2-1 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1) = 3, f(-1) = -1$
 $(x^2+x+2)f(x) = (x^2-1)Q(x) + ax+b$
 $x=1, x=-1$ 을 대입한다.
 $4f(1) = 12 = a+b \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2f(-1) = -2 = -a+b \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면,
 $a=7, b=5$
 $\therefore$ 나머지 $R(x) = 7x+5$
 $R(1) = 12$

8. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}$$

- ① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
 ④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & a & b & 1 & \\ & & -1 & -a + 1 & -b + a - 1 & \\ \hline & 1 & a - 1 & b - a + 1 & -b + a & \end{array}$$

이때 $k = -1$, $c = -1$, $d = -a + 1$, $b - a + 1 = -1$, $-b + a = 2$ 이므로

$k = -1$, $c = -1$, $a = 4$, $b = 2$, $d = -3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

9. $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-3}}$ 의 값은 ?

① $1 - \sqrt{2}$

② $-1 - \sqrt{2}$

③ $(1 + \sqrt{2})i$

④ $-(1 + \sqrt{2})i$

⑤ $(1 - \sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-(3-2\sqrt{2})}} &= \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{i} \\ &= (\sqrt{2}+1) \times (-i) \\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

10. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0,$
 $x = 1$

11. 다음 계산을 하시오.

$$1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i} \\ &= \frac{1^5}{i} + \frac{1^6}{i} + \frac{1^7}{i} + \frac{1^8}{i} \cdots \\ &= \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i} \\ &= -i - 1 + i + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= 1 + (0 + 0 + \cdots + 0) + \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} \\ &= 1 - i - 1 = -i \end{aligned}$$

12. $\overline{z - zi} = 1 - i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$

② 0

③ i

④ $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

⑤ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

해설

$$\overline{z - zi} = \overline{z(1 - i)}$$

$$= \bar{z} \cdot \overline{1 - i}$$

$$= \bar{z}(1 + i)$$

$$\bar{z}(1 + i) = (1 - i)$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = -i$$

$$\therefore z = i$$

13. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1 \end{aligned}$$

14. $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \dots + w^{100}$ 의 값은?

- ① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서} \\
 w^2 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} \\
 &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\
 w^3 &= w \cdot w^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 - 3i^2}{4} = 1 \\
 1 + w + w^2 &= 1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = 0 \text{ 이므로} \\
 \therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \dots + w^{100} \\
 &= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \dots \\
 &\quad + w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w) \\
 &= 0 + 0 + \dots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w) \\
 &= 1 + w = 1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}
 \end{aligned}$$

15. 자연수 n 에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x 가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

- ① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^n \\&= \left(\frac{2}{2i} \right)^n + \left(\frac{2}{-2i} \right)^n \\&= \left(\frac{1}{i} \right)^n + \left(-\frac{1}{i} \right)^n = (-i)^n + i^n\end{aligned}$$

i^n 은 $n = 4k, n = 4k+1, n = 4k+2, n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore x = 2, 0, -2$

따라서, x 가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

16. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.

㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.

㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.

㉤ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉤

⑤ ㉡, ㉢

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수) 라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

∴ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

∴ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

∴ 거짓

㉤ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$
 $= (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di)$
 $= \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

$\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i$
 $= (a - bi)(c - di)$
 $= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

∴ 참

17. 복소수 $z = a + bi$ (a, b : 실수)에 대하여 $\overline{z} = b + ai$ 로 나타낸다.

$z = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 \overline{z}^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$

② $4 + 3i$

③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$

⑤ $4 + 5i$

해설

$$z \overline{z} = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

$$z = \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로}$$

$$z \overline{z} = \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned} \therefore 5z^5 \overline{z}^4 &= 5z(z \overline{z})^4 \\ &= 5 \left(\frac{4+3i}{5} \right) (i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

18. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

$$\text{양변을 제곱해서 정리하면 } x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$

19. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x + 2$$

$$= (x-2)^2 ((x-2)B(x) + 1) + 3x + 2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

20. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) + 2 = 0, \alpha f(\alpha) + 2 = 0$

$$f(\alpha) = -2, \alpha = 1$$

$$\therefore f(1) = -2$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -3$$