1. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$= (x-1)\left\{a(x-1) + b\right\} + c$

$$
\begin{array}{c|ccc l}
1 & 3 & 2 & 1 & \\
  &   & 3 & 5 & \\
\hline
1 & 3 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{6} & \leftarrow \ \mathrm{c} \\
\cline{4-4}
  &   & 3 &   & \\
\cline{2-4}
  & 3 & \multicolumn{1}{|c}{8} & \leftarrow \mathrm{c} & \\
\cline{3-3}
  & \uparrow & & & \\
  & \mathrm{a} & & &
\end{array}
$$

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$

$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + 6$

$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x-1)^2 + b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5) = a(x-1)^2 + b(x-1)$

$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x + 5 = a(x-1) + b = ax - a + b$

$\therefore\ a = 3,\ b = 8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

2. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1　　② ± 2　　③ ± 3　　④ ± 4　　⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2-4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

3. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=5,\ a=3$

$\therefore\ a+b=8$

4. $\dfrac{5}{1+2i}=x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x+y=-1$

해설

$$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$$

$$1-2i=x+yi$$

$$x=1, y=-2, x+y=-1$$

5. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 10 ③ 20 ④ -10 ⑤ -20

해설

$x + y = 6, \quad xy = 12$

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\
&= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

6. 실수 x 에 대하여, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1|+|x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\quad b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1|+|x-2| = x+1-x+2 = 3$

7. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$

$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$x=1, x=-1$ 을 대입한다.

$4f(1)=12=a+b\cdots$ ㉠

$2f(-1)=-2=-a+b\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면,

$a=7,\ b=5$

$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$

$R(1)=12$

8. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & b & 1 \\
 & & c & d & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=-1$

④ $d=-3$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 1 & a & b & 1 \\
 & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\
\hline
 & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a}
\end{array}
$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-3}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-(3-2\sqrt{2})}} = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1) \times (-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

10. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$

순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,

$x=1$

11. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$ 이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=\frac{1}{i}^{5}+\frac{1}{i}^{6}+\frac{1}{i}^{7}+\frac{1}{i}^{8}\cdots$$

$$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=-i-1+i+1=0$$

$$\therefore\ (\text{준식})=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}$$

$$=1-i-1=-i$$

12. $\overline{z - zi} = 1 - i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$ ② 0 ③ i

④ $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

해설

$$\begin{aligned} \overline{z - zi} &= \overline{z(1-i)} \\ &= \bar{z} \cdot \overline{1-i} \\ &= \bar{z}(1+i) \\ \bar{z}(1+i) &= (1-i) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \bar{z} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$$

$$\therefore\ z = i$$

13. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi},\ \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\therefore \bar{w} = \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1$$

14. $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-3i^2}{4} = 1$$

$1+w+w^2 = 1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$$\therefore 1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}$$

$$= 1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots$$

$$+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)$$

$$= 0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w) = (w^3)^{33}\cdot(1+w)$$

$$= 1+w = 1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

15. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2}\right\}^{n} + \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2}\right\}^{n}$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^{n} + \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^{n} + \left(-\frac{1}{i}\right)^{n} = (-i)^{n} + i^{n}$$

i^n 은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n=4k$ 이면 $x=1+1=2$

(ii) $n=4k+1$ 이면 $x=-i+i=0$

(iii) $n=4k+2$ 이면 $x=-1-1=-2$

(iv) $n=4k+3$ 이면 $x=i-i=0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

16. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.
㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.
㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.

따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣ $$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

17. 복소수 $z=a+bi$ $(a,b:$ 실수$)$에 대하여 $<z>=b+ai$로 나타낸다. $z=\dfrac{4+3i}{5}$일 때, $5z^5<z>^4$의 값을 구하면?

① $3+4i$ ② $4+3i$ ③ $5+4i$

④ $5+3i$ ⑤ $4+5i$

해설

$z<z>=(a+bi)(b+ai)=(a^2+b^2)i$

$z=\dfrac{4+3i}{5}$이므로

$z<z>=\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}i=i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5z^5<z>^4 &= 5z(z<z>)^4\\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

18. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1+i$　　② $-i$　　③ i

④ -1　　⑤ 1

해설

$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$

$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$

$= -x^2 - x - 1$ $(\because\ x^2 + 2x + 2 = 0)$

$= -(-2x - 2) - x - 1$

$= x + 1 = i$

19. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$ ② $3x-2$ ③ $3x+2$

④ x^2-2x+1 ⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3B(x)+x^2-x+6 \\ &= (x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2 \\ &= (x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2 \end{aligned}$$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2 \end{aligned}$$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

20. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$