

1. 등식 $ax^2 - (2a+c)x - 1 = (b-2)x^2 + (b+c)x - c$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{11}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

해설

주어진 식에서 동류항의 계수를 비교하면

$$a = b - 2, \quad -(2a + c) = b + c, \quad 1 = -c$$

$$a - b = -2, \quad -2a - b = 2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{4}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$

$$a + b + c = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

2. 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c 의 값을 구하여라.

$$ax^2 - x + c - 3 = 2x^2 - bx - 2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 1$

▷ 정답: $c = 1$

해설

각 항의 계수를 서로 비교한다.

3. 임의의 x 에 대하여 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입 하면
 $-1 = a + b + c + d$
 $\therefore a + b + c + d = -1$

해설

$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
 $= (x+1)\{a(x+1)^2 + b(x+1) + c\} + d$
 $= (x+1)\{a(x+1) + b\} + c + d$ 이므로
 $x^3 - 1$ 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때
 차례대로 나오는 나머지가 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & -1 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & \underline{-2} \leftarrow d \\
 & & -1 & 2 & \\
 -1 & 1 & -2 & \underline{3} & \leftarrow c \\
 & & -1 & & \\
 & 1 & \underline{-3} & & \leftarrow b \\
 & \uparrow & & & \\
 & a & & &
 \end{array}$$

4. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면, $-2 = 2a \quad \therefore a = -1$
양변에 $x = 1$ 을 대입하면, $-3 = -b \quad \therefore b = 3$
 $\therefore 2ab = -6$

5. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

6. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 $x - 2$, $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$f(x) = (x-2)Q(x) + a$$

$$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$$

$$f(2) = 4 = a, f(1) = -2 = b$$

$$\therefore a + b = 2$$

7. 다항식 $ax^3 + bx^2 - 4$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어지도록 a, b 를 정할 때, a 와 b 의 곱을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 - 4 &= (x^2 + x - 2)Q(x) \\ &= (x-1)(x+2)Q(x) \end{aligned}$$

양변에 $x=1, x=-2$ 를 각각 대입하면
 $a+b-4=0, -8a+4b-4=0$
두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$
 $\therefore ab=3$

해설

$$ax^3 + bx^2 - 4 = (x^2 + x - 2)(ax + 2)$$

우변을 전개하여 계수를 비교하면
 $a=1, b=3 \therefore ab=3$

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2) = 0$ 을 만족시키는 k 를 구하면,

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$$

$$\therefore k = 6$$

9. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

10. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bx+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$
 $\therefore a=1, b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

11. 다항식 $2x^3 + ax^2 + x + b$ 가 $x^2 - x + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a - b$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 + ax^2 + x + b \\ &= (x^2 - x + 1)(2x + c) \\ &= 2x^3 + (c - 2)x^2 + (2 - c)x + c \\ \therefore & a = c - 2, 1 = 2 - c, b = c \\ & c = 1 \text{ 이므로 } a = -1, b = 1 \\ \therefore & a - b = -2 \end{aligned}$$

12. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $x^2 - x - 12$ 로 나눈 나머지가 $14x - 9$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $= (x^2 - x - 12)Q(x) + 14x - 9$
 $= (x - 4)(x + 3)Q(x) + 14x - 9$
 $x = 4, x = -3$ 을 각각 대입하면
 $16a + 4b + 67 = 47 \cdots \text{㉠}$
 $9a - 3b - 24 = -51 \cdots \text{㉡}$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 3$
 $\therefore a + b = 1$

13. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{15}(x-1)^{15}$
일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{15} \dots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{14}) \text{이다.}$$

$$\therefore a_0 + a_2 + \dots + a_{14} = 1$$

14. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 성립할 때, $a+b+c+d$ 의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

계수의 합 $a+b+c+d$ 를 구할 때는 우변의 문자부분을 모두 1이 되게 하는 x 값을 양변에 대입하면 간단하게 그 값을 구할 수 있다.

이 문제에서는 $x=2$ 를 양변에 대입하면

$$16 - 12 - 2 + 1 = a + b + c + d$$

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

해설

a, b, c, d 의 값을 각각 구하기 위해서는 아래와 같이 조립제법을 사용할 수 있다.

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

$$= (x-1)[(x-1)(a(x-1) + b) + c] + d$$

즉, $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b 가 되고 마지막 몫이 a 이다.

1	2	-3	-1	1	
	2	-1	-2		
1	2	-1	-2	-1	← d
	2	1			
1	2	1	-1	-1	← c
	2				
	2	3			← b
	↑				
	a				

$$\therefore a + b + c + d = 3$$

15. x^4 을 $x + \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R_1 이라 하자. R_1 을 구하고, 이 때, $Q(x)$ 를 $x - \frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫 $Q_1(x)$ 을 구하면?

- ① $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{4})$
- ② $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{4})$
- ③ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = (x^2 - \frac{1}{4})$
- ④ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = x^2 + \frac{1}{4}$
- ⑤ $R_1 = \frac{1}{16}$, $Q_1(x) = x + \frac{1}{2}$

해설

$$x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x) + R_1$$

(1) 양변에 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = R_1 \quad \therefore R_1 = \frac{1}{16}$$

(2) $x^4 = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x) + \frac{1}{16}$ 이므로

$$x^4 - \frac{1}{16} = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) Q_1(x)$$

$$Q_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore \text{구하는 몫은 } x^2 + \frac{1}{4}$$

16. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1, x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$

② $x+1$

③ $-x+1$

④ x

⑤ $-x$

해설

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + ax + b \text{라 하면,}$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(2) = 2a + b = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0 \text{이므로 나머지는 } x$$

17. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$, $x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 3, 7이라고 할 때, $f(x)$ 를 $(x-2)(x-3)$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$

② $3x-4$

③ $4x-5$

④ $5x+6$

⑤ $6x-7$

해설

$$f(x) = (x-2)Q_1(x) + 3, f(2) = 3$$

$$f(x) = (x-3)Q_2(x) + 7, f(3) = 7$$

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q_3(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 7 \text{ 이다.}$$

$$\text{연립하면 } a = 4, b = -5$$

$$\therefore \text{나머지는 } 4x - 5$$

18. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x-2$ 로 나누어서 떨어진다. 이 다항식을 $(x+1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $-x+2$

③ $x-1$

④ 2

⑤ 3

해설

$$R(x) = ax + b \text{라 두면}$$

$$R(-1) = -a + b = 3, R(2) = 2a + b = 0$$

$$a = -1, b = 2 \text{이므로 } R(x) = -x + 2$$

19. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지가 $x + 4$ 이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $2x + 3$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 하자. 이때 $R(10)$ 의 값은?

- ① 86 ② 88 ③ 90 ④ 92 ⑤ 94

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + x + 4$$

$$\cdots f(1) = 5, f(2) = 6 \cdots \text{㉠}$$

$$f(x) = (x-1)(x-3)P(x) + 2x + 3$$

$$\cdots f(1) = 5, f(3) = 9 \cdots \text{㉡}$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Z(x) + R(x)$$

$$R(x) = ax^2 + bx + c \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡를 ㉢에 각각 대입하면,

$$a + b + c = 5, 4a + 2b + c = 6, 9a + 3b + c = 9$$

세식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = -2, c = 6$

$$R(x) = x^2 - 2x + 6$$

$$\therefore R(10) = 86$$

20. 이차 이상의 다항식 $p(x)$ 를 $x - 2007$ 와 $x - 2008$ 으로 나눈 나머지는 각각 2007와 2008이다. $p(x)$ 를 $(x - 2007)(x - 2008)$ 으로 나눈 나머지는?

① 2007×2008

② $2007x$

③ $2008x$

④ $x - 2007 \times 2008$

⑤ x

해설

$p(x)$ 를 $(x - 2007)(x - 2008)$ 으로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $q(x)$ 와 $ax + b$ 라 놓으면
 $p(x) = (x - 2007)(x - 2008)q(x) + ax + b \cdots \cdots \text{㉠}$
나머지정리에 의해
 $p(2007) = 2007, p(2008) = 2008$ 이므로
㉠의 x 에 2007와 2008을 대입하면
 $2007a + b = 2007, 2008a + b = 2008$
 $\therefore a = 1, b = 0$
그러므로 구하는 나머지는 x

21. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)Q_1(x) + 3$$

$$= (x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$$f(-2) = 3 \quad f(1) = 0 \quad f(-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ 대입, } -8 + 4a - 2b + c = 3$$

$$x = -1 \text{ 대입, } -1 + a - b + c = 0$$

$$x = 1 \text{ 대입, } 1 + a + b + c = 0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a = 3, b = -1, c = -3$$

$$\therefore abc = 9$$

22. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}$$

- ① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
 ④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & a & b & 1 & \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 & \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & -b+a & \end{array}$$

이때 $k = -1, c = -1, d = -a + 1, b - a + 1 = -1, -b + a = 2$

이므로 $k = -1, c = -1, a = 4, b = 2, d = -3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

23. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\frac{ax^2+4x+b}{x-2} &= k \text{라 하면} \\ ax^2+4x+b &= k(x-2) \\ ax^2+(4-k)x+b+2k &= 0 \\ x \text{에 대한 항등식이므로} \\ a &= 0 \\ 4-k &= 0 \text{에서 } k = 4 \\ b+2k &= 0 \text{에서 } b = -8 \\ \therefore a-b &= 8\end{aligned}$$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면 분자인 ax^2+4x+b 가 분모인 ' $x-2$ ' 만을 인수로 가져야 한다. 즉, 분자가 $k(x-2)$ 가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}\frac{ax^2+4x+b}{x-2} &= \frac{4(x-2)}{x-2} = 4 \\ \therefore a &= 0, b = -8 \text{에서 } a-b = 8\end{aligned}$$

24. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$ 가 x 에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면
 $p^3 - p^2 + 2 = 0$
 $(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$
따라서 주어진 식은
 $x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
 $= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$
 $\therefore (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
 $= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$
양변을 비교하면, $x+1 = x-p$,
 $x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
 $\therefore p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
 $= ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$
 $\therefore a = 1, 2a+b = -2, a+b+c = 2$
 $\therefore b = -4, c = 5$
따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$
 $\therefore a + b + c + p = 1$

25. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{50}$ 의 값은?

- ㉠ 0 ㉡ 1 ㉢ 2^{24} ㉣ 2^{25} ㉤ 2^{50}

해설

$$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{50}x^{50}$$

$x=1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{50} \dots \textcircled{1}$$

$x=-1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{49} + a_{50} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{50} = 0$$

26. x 에 관한 3차 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 2, $x+1$ 로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$ 에서 x^2 의 계수를 a , 상수항을 b 라 하면 $a+b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$f(x) = px^3 + ax^2 + qx + b \text{라 하면}$$

$$f(1) = 2, f(-1) = 4 \text{에서}$$

$$p + a + q + b = 2 \cdots \text{㉠}$$

$$-p + a - q + b = 4 \cdots \text{㉡}$$

㉠+㉡를 하면

$$2(a+b) = 6, a+b = 3$$

27. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

28. 다항식 $x^{51} + 30$ 을 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. 이때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + R \text{ 이라 하면}$$

$$x = -1 \text{을 대입하면 } R = 31$$

$$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + 31$$

$Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는

$$Q(1), x = 1 \text{식에 대입}$$

$$31 = 2Q(1) + 31$$

$$\therefore Q(1) = 0$$

29. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소}) \text{이다. 이 때, } m+n \text{의 값을 구하여라.}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

30. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i = 0, 1, 2, \dots, 20$)

① 2^{10}

② $2^{10} - 1$

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_{20} \cdots \text{㉠}$$

또, 이 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{19} + a_{20} \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} + \text{㉡} \text{을 하면 } 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 1$$

31. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 는 $x+2$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) - g(x)$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x + 2$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $x + f(x)$ ㉡ $x^2 + f(x)g(x)$
 ㉢ $f(g(x)) - x$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2) + g(-2) = 0, f(-2) - g(-2) = 4$
 두식을 연립하면, $f(-2) = 2, g(-2) = -2$
 ㉠ : $x + f(x) \rightarrow x = -2$ 를 대입하면
 $-2 + f(-2) = 0$
 ㉡ : $x^2 + f(x)g(x) \rightarrow x = -2$ 를 대입하면 $(-2)^2 + f(-2)g(-2) = 0$
 ㉢ : $f(g(x)) - x \rightarrow x = -2$ 를 대입하면 $f(g(-2)) - (-2) = f(-2) + 2 = 4$

32. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$ 이고, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 8이다. $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① $x^2 - x - 2$ ② $x^2 - x + 2$ ③ $x^2 + x - 2$
④ $-x^2 + 3x$ ⑤ $-x^2 + 3x + 2$

해설

$f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지는 $ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)Q(x) + a(x-1)^2 + (x+1)$$

($\because f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$)

양변에 $x = -2$ 를 대입하면 $f(-2) = 9a + (-2) + 1 = 8$

$$\therefore a = 1$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + x + 1 = x^2 - x + 2$$

\therefore 구하는 나머지는 $x^2 - x + 2$

33. 다항식 $f(x)$ 는 다항식 $g(x)$ 로 나누어떨어진다. $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하고, $Q(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x), r(x)$ 라고 할 때, $f(x)$ 를 $\{g(x)\}^2$ 으로 나눈 몫과 나머지는?

- ① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$
- ② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$
- ③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$
- ④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$
- ⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) \cdots \text{㉠}$$

$$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$$

$r(x)$ 가 $g(x)$ 보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$ 는 $\{g(x)\}^2$ 보다 낮은 차수이다.

따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$ 이고 몫은 $h(x)$ 이다.