

1. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$

② $\frac{x^{2n}}{x-1}$

③ $\frac{x^{2n}-1}{x-1}$

④ $\frac{x^{2n}-1}{x}$

⑤ $\frac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x , 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x - 1}$$

2. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}, \quad S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$$

이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

4. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7 항까지의 합은?

① 127 ② 136 ③ 148 ④ 156 ⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$= 96r^2 = 24$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제 7 항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$

5. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 5 \\ S_{20} &= \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} - 1)(r^{10} + 1)}{r - 1} = 30 \\ r^{10} + 1 &= 6 \text{ 이므로 } r^{10} = 5 \\ S_{30} &= \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ 이므로} \\ S_{30} &= \frac{a(r^{10} - 1)(r^{20} + r^{10} + 1)}{r - 1} \\ &= 5 \cdot (r^{20} + r^{10} + 1) \\ &= 5 \cdot (5^2 + 5 + 1) \\ &= 5 \cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

6. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

해설

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_5 = 30$, $S_{10} = 90$ 이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면 $30(r^5 + 1) = 90 \therefore r^5 = 2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{a(r^{15} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^{10} + r^5 + 1)}{r - 1} \\ &= 30(2^2 + 2 + 1) = 210 \end{aligned}$$

7. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n = 6$$

8. 수열 $8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots$ 에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작게 되는 항은 제 몇 항인가?

① 제11 항

② 제12 항

③ 제13 항

④ 제14 항

⑤ 제15 항

해설

첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

이때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} < \frac{1}{1000}$ 에서 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n - 4 = 10 \quad \therefore n = 14$$

9. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면

$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$ 이므로

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$$

$\log_3(T_n - 1) = n$ 에서 $T_n = 3^n + 1$ 이므로

$$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$$

$$= 28 - 10 = 18$$

이때, $a_3 = b_3$ 이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$

10. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 a , b , c 인 직육면체에 대하여 a , b , c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180 일 때, 이 직육면체의 부피는?

① 174 ② 188 ③ 202 ④ 216 ⑤ 230

해설

등비수열 a , b , c 의 공비를 r 이라 하면 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 a , ar , ar^2 이다.

모서리의 길이의 총합은 $4(a + ar + ar^2) = 60$ 에서

$$a(1 + r + r^2) = 15 \cdots \textcircled{1}$$

또, 겉넓이는 $2(a \cdot ar + a \cdot ar^2 + ar \cdot ar^2) = 180$ 에서

$$a^2r(1 + r + r^2) = 90 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ 에서 } ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피 V 는

$$V = a \cdot ar \cdot ar^2 = a^3r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

11. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서
 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 36$,
 $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n} = 18$ 일 때,
 $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{2n} - S_n = 18 \text{ 에서 } S_{2n} = S_n + 18 = 36 + 18 = 54$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r} \\ &= 36 \cdot (1+r^n) = 54 \end{aligned}$$

$$1+r^n = \frac{3}{2} \quad \therefore r^n = \frac{1}{2}$$

$$S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$$

$$= 36 \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = 63$$

이때, $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n} = S_{3n} - S_n$ 이므로
 $63 - 54 = 9$

12. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 이라 하자. P_n 의 값이 최대일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$ 이고, $a_n \neq 1$ 이므로
 $a_{n+1} > 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} > P_n$,
즉, $P_{n+1} > P_n$
 $a_{n+1} < 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$
따라서, $a_n > 1$ 인 마지막 항까지의 곱이 P_n 의 최댓값이다.
 $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1, 2^{n-1} < 3000$
 $2^{11} = 2048$ 이므로 $n - 1 = 11 \quad \therefore n = 12$

13. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_n = 2n + 1, \quad b_n = 3n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$ 이라 한다. 이때, C_{20} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

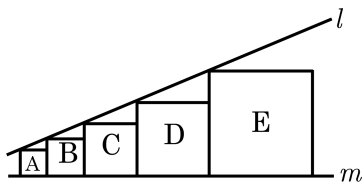
▷ 정답 : 119

해설

$a_2 = b_1 = 5$, $a_5 = b_3 = 11$, $a_8 = b_5 = 17, \dots$ 이므로 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.

$$\therefore c_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119$$

14. 다음 그림과 같이 두 직선 l , m 사이에 5개의 정사각형 A, B, C, D, E가 서로 접해 있다. 정사각형 A와 E의 넓이가 각각 2, 32일 때, 나머지 정사각형 B, C, D의 넓이의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

주어진 정사각형 A, B, C, D, E의 넓이가 순서대로 등비수열을 이루므로 정사각형 A, E의 넓이가 각각 2, 32일 때, 정사각형 B, C, D의 넓이는 각각 4, 8, 16이 된다. 따라서, 구하는 정사각형 B, C, D의 넓이의 합은 $4 + 8 + 16 = 28$

15. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음 보기와 같을 때, 보기 중 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열인 것을 모두 고르면?

보기

$\textcircled{\tiny ㉠} S_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$ $\textcircled{\tiny ㉡} S_n = 2^{n-1} - 2$
 $\textcircled{\tiny ㉢} S_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

- ☒ ① $\textcircled{\tiny ㉠}$ ② $\textcircled{\tiny ㉡}$ ③ $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}$
④ $\textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}$ ⑤ $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}$

해설

$\textcircled{\tiny ㉠} n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= \left(2^{n-1} - \frac{1}{2}\right) - \left(2^{n-2} - \frac{1}{2}\right) = 2^{n-2}$
이것은 $n = 1$ 일 때에도 성립하므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$,
공비가 2인 등비수열이다.
 $\textcircled{\tiny ㉡} n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = -1$
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (2^{n-1} - 2) - (2^{n-2} - 2) = 2^{n-2}$
이것은 $n = 1$ 일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이
아니다.
 $\textcircled{\tiny ㉢} n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{3}{8}$
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right\} - \left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
이것은 $n = 1$ 일 때 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이
아니다.
따라서 보기 중 등비수열인 것은 $\textcircled{\tiny ㉠}$ 이다.

16. 각 항이 복소수인 등비수열 $\{Z_n\}$ 에 대하여 $z_1 = 1$, $z_2 = a + bi$, $z_3 = a - bi$ (단, a, b 는 실수, $b > 0$)일 때, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 모든 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

해설

1, z_2 , z_3 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $z_2^2 = z_3$

즉, $(a^2 - b^2) + 2abi = a - bi$ 이고

$b > 0$ 이므로 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, $z_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$, $z_4 = 1, \dots$

이므로

$z_{3n-2} = 1 (n = 1, 2, 3, \dots, 67)$

따라서, z_1 부터 z_{200} 까지의 항 중에서 실수인 것들의 합은 67이다.

17. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$ 이고 곱이 32 일

때, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$ 의 값은?

- ① $\frac{31}{4}$
- ② $\frac{31}{8}$
- ③ $\frac{31}{12}$
- ④ $\frac{8}{31}$
- ⑤ $\frac{4}{31}$

해설

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{31}{2}$$

$$a(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) = \frac{31}{2}$$

$$\text{또한 } a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4 = 32$$

$$a^5 r^{10} = 32$$

$$(ar^2)^5 = 2^5$$

$$ar^2 = 2, a = \frac{2}{r^2}$$

그런데

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$$

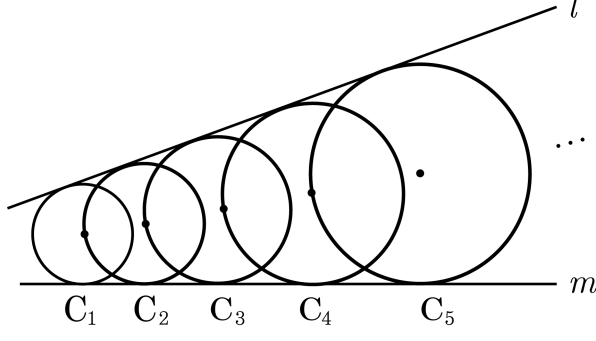
$$= \frac{1}{ar^4} (r^4 + r^3 + \cdots + 1)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot (r^4 + \cdots + 1)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot \frac{31}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

$$= \left(\frac{r^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^4} \cdot \frac{31}{2} = \frac{31}{8}$$

18. 그림과 같이 두 직선 l, m 에 동시에 접하는 원 C_1 이 있다. 원 C_1 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_1 보다 큰 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_2 보다 큰 원을 C_3 라 하자. 이와 같은 방법으로 원 C_k 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_k 보다 큰 원을 C_{k+1} 이라 하자. ($k = 1, 2, 3, \dots$) 원 C_1 의 넓이가 1, 원 C_5 의 넓이가 4일 때, 원 C_{19} 의 넓이를 구하여라.

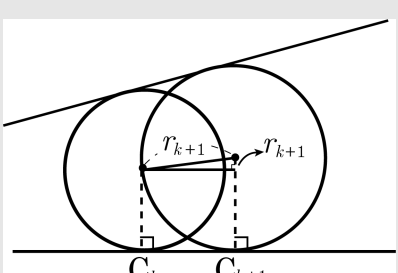


▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

원 C_k 의 반지름을 r_k , 넓이를 S_k , 원 C_{k+1} 의 반지름을 r_{k+1} , 넓이를 S_{k+1} 이라 하면,



$$\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+1}} = p(\text{상수}), r_{k+1} = \frac{1}{1-p} r_k$$

수열 $\{r_k\}$ 가 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$ 도 등비수열이고, $\{S_k\}$ 의 공비를 a 라 하면

$$S_1 = 1, S_5 = a^4 = 4 \text{ 이므로 } a^2 = 2$$

$$\therefore S_{19} = a^{18} = 2^9 = 512$$