1. 이자부등식 $x^2 + 2x - 35 < 0$을 풀면?

① $-15 < x < 12$ ② $-15 < x < 5$ ③ $-7 < x < 5$
④ $-7 < x < 2$ ⑤ $-5 < x < 7$

해설
$x^2 + 2x - 35 < 0$에서 $(x+7)(x-5) < 0$
$\therefore -7 < x < 5$

2. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x-4)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

3. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다
② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수
④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

4. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$의 해를 구하면?

① $x \geq 3$ 또는 $x \leq -3$
② x는 모든 실수
③ $x \neq 3$인 모든 실수
④ $x = 3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \leq 0$
$(x - 3)^2 \leq 0$
$\Rightarrow x = 3$

5. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax - 4 \geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$ ② $0 \leq a < 1$또는 $a > 3$

③ $-4 < a$ ④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a \leq 0$이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4) < 0$이므로 $-4 < a < 0$이고
$a = 0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

6. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+2ax+3>0$이 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

x의 계수가 미지수이므로

ⅰ) $a=0$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ⅱ) $a \neq 0$일 때,

$ax^2+2ax+3>0$의 해가 모든 실수이려면

$a>0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=a^2-3a<0,\ a(a-3)<0$

$\therefore 0<a<3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a<3$

ⅰ), ⅱ)에서 $0 \leq a<3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

7. 이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때 이를 만족하는 정수 a의 값이 아닌 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$

이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-(4a+5)<0$

$a^2-4a-5<0$, $(a-5)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<5$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이다.

8. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3\geq 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq 0$, $(a-3)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

9. 이차부등식 $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$
② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$
③ $x \neq \frac{3}{2}$인 모든 실수
④ 해는 없다.
⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$
$\Rightarrow\ 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$
$\Rightarrow\ (2x-3)^2 \leq 0$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

10. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$　② $x = 8$　③ 해는 없다.
④ 모든 실수　⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$
$x^2 - 16x + 64 \le 0$
$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$
$\Rightarrow \quad x = 8$

11. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$　　② $a>-\frac{1}{2}$　　③ $a>-\frac{1}{3}$

④ $a>-\frac{1}{4}$　　⑤ $a>-\frac{1}{5}$

해설

$ax^2+(a+1)x+a>0$에서

i) $a=0$이면 $x>0$

$\therefore$ 실수해가 존재한다.

ii) $a>0$ 이면 $y=ax^2+(a+1)x+a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로

$ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.

iii) $a<0$이면 $D=(a+1)^2-4a^2>0$

$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{3}<a<1$, $a<0$ 이므로 $-\frac{1}{3}<a<0$

i), ii), iii) 에서 $a>-\frac{1}{3}$

12. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$
④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면
$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.
$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$
준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서
$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$
$\therefore\ -1<x<2$

13. x에 관한 이차부등식 $ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

② $a<b$일 때, $x \le -1,\ x \le 3$이다.

③ $a<0$일 때, $-1 \le x \le 3$이다.

④ $b<0$일 때, $x \le -1,\ x \ge 3$이다.

⑤ $a \ge b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2-2ax-3a \ge bx^2-2bx-3b$을 이항하여 정리하면
$(a-b)x^2-2(a-b)x-3(a-b) \ge 0$(이차부등식이므로 $a \ne b$)

ⅰ) $a<b$이면 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \le 0$
$\therefore -1 \le x \le 3$

ⅱ) $a>b$이면
$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \ge 0$
$\therefore x \le -1,\ x \ge 3$

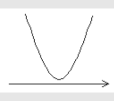
14. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$ 성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\frac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

15. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는 ?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1 \le a \le 4$

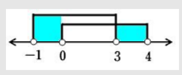
④ $-1<a \le 0$ 또는 $3 \le a<4$

⑤ $3 \le x \le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \quad \cdots ㉠$
$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots ㉡$

㉠에서 허근을 가지려면
$D=a^2-4a<0$
$\therefore\ 0<a<4$
㉡에서 허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-3<0$
$(a+1)(a-3)<0$
$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면, 

$\therefore\ -1<a \le 0$ 또는 $3 \le a<4$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-2k+3=0$이 두 실근을 가지도록 실수 k의 값의 범위를 정하면?

① $k \le -3$ 또는 $k \ge 1$
② $-3 \le k \le 1$
③ $k=-3$ 또는 $k=1$
④ $k<-3$ 또는 $k>1$
⑤ $-3<k<1$

해설

두 실근을 갖는다는 것은
서로 다른 두 실근 또는 중근을 갖는다는 것이므로
$D' = k^2-(-2k+3) \ge 0$
$k^2+2k-3 \ge 0$
$(k+3)(k-1) \ge 0$
$\therefore\ k \le -3$ 또는 $k \ge 1$

17. 이차방정식 $4x^2+8kx+8k-3=0$ 이 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ 또는 $k \ge \frac{3}{2}$
② $k < \frac{1}{2}$ 또는 $k > \frac{3}{2}$
③ $\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$
④ $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{2}$
⑤ 모든 실수

해설

$\frac{D}{4} \ge 0$ 에서 $(4k)^2-4(8k-3) \ge 0$

$16k^2-32k+12 \ge 0$

$4k^2-8k+3 \ge 0$

$(2k-3)(2k-1) \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{2}$ 또는 $k \ge \frac{3}{2}$

18. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.

② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.

⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$일 때

$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로

$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로

$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로

$a<\frac{1}{2}$일때, $2<x<\frac{1}{a}$,

$a>\frac{1}{2}$일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

19. 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a>2$ ② $a \geq 2$ ③ $a<2$

④ a는 모든 실수 ⑤ $a< \pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 x는 모든 실수

$a \neq 2$일 때,

$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0 \cdots$ ㉠에서

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로

i) $a>2$이면, x는 모든 실수

ii) $a<2$이면, $\frac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha, \beta (\alpha<\beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 x값이 존재한다.

$\therefore$ a는 모든 실수

20. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2 + 4ax + 5a > 0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a > 0$일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a = 0$일 때 해는 $x = 0$뿐이다.
㉢ $a < 0$일 때 해는 없다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + 4ax + 5a > 0$에서
$a(x^2 + 4x + 5) > 0,\ a\{(x+2)^2 + 1\} > 0$
㉠ $a > 0$일 때 $(x+2)^2 + 1 > 0$ $\therefore$ 모든 실수
㉡ $a = 0$일 때 $0 \cdot \{(x+2)^2 + 1\} > 0$ $\therefore$ 해는 없다.
㉢ $a < 0$일 때 $(x+2)^2 + 1 < 0$ $\therefore$ 해는 없다.

21. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\}>0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$　② $1<k<2$　③ $1<k<4$
④ $-1<k<3$　⑤ $-2<k<-1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$k>0 \cdots$ ①
$x^2-(k-2)x-3(k-2)>0$이 항상 성립하려면
$D=(k-2)^2+12(k-2)<0$에서
$(k-2)(k+10)<0$
$\therefore\ -10<k<2 \cdots$ ②
①, ②에서 $0<k<2$

22. 모든 실수 x에 대하여 $(|a|+a)x \geq a^2+a-20$이 성립할 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 9 개　② 6 개　③ 5 개　④ 4 개　⑤ 3 개

해설

$(|a|+a)x \geq a^2+a-20$에서
a의 부호에 따라 범위를 나누면,
① $a<0 : |a|=-a$
$0 \cdot x \geq a^2+a-20,\ (a+5)(a-4) \leq 0$에서
$-5 \leq a \leq 4$
$\therefore\ -5 \leq a < 0$
② $a=0 : 0 \cdot x \geq -20$이므로, 항상 성립한다.
$\therefore\ a=0$
③ $a>0 : |a|=a$
$2a \cdot x \geq a^2+a-20,\ x \geq \frac{1}{2a}(a^2+a-20)$
모든 x에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.
$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a의 범위는 $-5 \leq a \leq 0$,
따라서 정수 a의 개수는 6 개

23. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$ 중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$　② $a\le 1,\ 3\le a$　③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$　⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$ 에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2 \cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$ 에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ -1\le a\le\frac{1}{3}\cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$