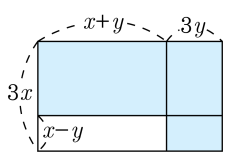
1. 다항식 x^3-3x-3을 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫이 $ax+b$이고, 나머지가 $cx+d$이었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3-3x-3=(x^2-2x-1)(ax+b)+cx+d$
에서 계수를 비교하면
$a=1,\ -b+d=-3,\ -a-2b+c=-3,\ b-2a=0$
에서 $a=1,\ b=2,\ d=-1,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c+d=1+2+(-1)+2=4$

2. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

3. $(x+y)^n$을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7개 ② 8개 ③ 12개 ④ 13개 ⑤ 64개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$=\{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$=(4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$의 항의 개수는 13개이다.

4. $\frac{x+1}{3} = y-2$를 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여, 항상 $ax+by=7$이 성립할 때, a, b의 값을 구하여라. (a, b는 상수)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=-1$

▷ 정답: $b=3$

해설

$\frac{x+1}{3} = y-2,\ x+1=3(y-2)$

$x-3y=-7$

$-x+3y=7 \Leftrightarrow ax+by=7$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

5. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+3$ 이 다항식 $2x^2-x-3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a+b$ 의 값은 ?

① 3 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -5

해설

$2x^3+ax^2+bx+3=(2x^2-x-3)Q(x)$

$=(x+1)(2x-3)Q(x)$

$x=-1$ 일 때, $-2+a-b+3=0$

$\therefore\ a-b=-1\cdots$㉠

$x=\frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{27}{4}+\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+3=0$

$27+9a+6b+12=0$

$\therefore\ 3a+2b=-13\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=(-3)+(-2)=-5$

6. $x^2+y^2+2xy-x-y$을 인수분해 하면?

① $(x-y)(x+y+1)$ ② $(x+y)(x-y-1)$

③ $(x-y)(x-y-1)$ ④ $(x+y)(x+y-1)$

⑤ $(x+y)(x+y+1)$

해설

$x^2+y^2+2xy-x-y$

$=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)$

7. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

8. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$
$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

9. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A\triangle B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A\blacktriangledown(B\triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$A\blacktriangledown(B\triangle A) = A\blacktriangledown(2B + A)$$
$$= A - 3(2B + A) = -2A - 6B$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

10. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$　② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R

③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$　④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R

⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

11. $f(x)=x^3-3x^2+2x+5$에 대하여 $f(x-1)=x^3+Ax^2+Bx+C$일 때, 상수$A\times B\times C$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3-3(x-1)^2+2(x-1)+5 \\ &= x^3+Ax^2+Bx+C \cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,
$x=0$일 때, $-1=C$
$x=1$일 때, $5=1+A+B+C$
$x=2$일 때, $5=8+4A+2B+C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=-6,\ B=11,\ C=-1$

12. 등식 $(2k+1)y-(k+3)x+10=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$(\text{준식})=(y-3x+10)+(2y-x)k=0$

$\therefore 2y=x, y-3x=-10$

$\therefore x=4, y=2$

$\therefore x+y=6$

13. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$　② $a=1,\ b=3$

③ $a=3,\ b=-1$　④ $a=-3,\ b=-1$

⑤ $a=3,\ b=1$

해설

x^3+ax^2+bx+3
$=(x^2+1)(x+c)$
$=x^3+cx^2+x+c$
$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$
따라서 $a=3,\ b=1$

14. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4\cdot(2x-1)^7$
$=a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$는 양변에 $x=1$을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4\cdot(2-1)^7=2^4=16$

15. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$f(2)=5,\ f(-2)=3$

$f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x-2)(x+2)Q(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=5,\ f(-2)=-2a+b=3$

$a=\frac{1}{2},\ b=4$

16. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ (\text{단. } a\neq b\neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1\end{aligned}$$

17. $x+y-1=0$일 때, 다음 중 $2x^2+y^2-xy-8$의 인수인 것은?

① $x-1$　② $x+1$　③ $x+2$

④ $4x+5$　⑤ $4x+7$

해설

$x+y-1=0$에서 $y=-x+1$

$\therefore\ 2x^2+y^2-xy-8$

$=2x^2+(-x+1)^2-x(-x+1)-8$

$=4x^2-3x-7$

$=(4x-7)(x+1)$

18. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$을 계산하면?

① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$

④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$100 = a$로 치환 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\ &= \left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right) \\ &= a^6 - 1 \\ &= 100^6 - 1\end{aligned}$$

19. $x+y=2$, $x^3+y^3=14$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $xy=-1$　② $x^2+y^2=6$　③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$　⑤ $x^6+y^6=198$

해설

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서

$14=2^3-3xy\times 2$

$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서

$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서

$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서

$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$

20. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기] 의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡
④ ㉠,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0\cdots$①
$f(-1)-g(-1)=2\cdots$②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

21. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$이다. pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2\\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2\\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2\\ &= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2\\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p=-18,\ q=-4$

$\therefore pq=(-18)\times(-4)=72$

22. $198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198 = x, 200 = y, 202 = z$라 하면

$198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2} \times 600 \times 24$

$= 7200$

23. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$ 를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$a+b+c=3\cdots①$
$a^2+b^2+c^2=9\cdots②$
$a^3+b^3+c^3=24\cdots③$ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots④$
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots⑤$
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times3$
$=6)$

24. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0 ② α ③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$ ⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&\quad\vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$
$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

25. $a+b+c=0,\ abc\neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=0(\because\ a+b+c=0\ )$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore$(준식) $=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{bc+ca+ab}{abc}\right)$
$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$