1. 첫째항이 3, 공비가 3 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a_n = 3^n$

해설

$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

2. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항과 공비 r을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6} \cdot 3$ ③ $\frac{9}{2}, 9$ ④ $\frac{1}{6}, 9$ ⑤ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

해설

$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}, \ \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$$

$$\therefore a_1 = \frac{9}{2}, \ r = 9$$

3. 다음 등비수열의 일반항 a_n은?

$$16,\quad -8,\ 4,\quad -2,\cdots\cdots$$

① $8(-2)^n$ ② $16(-2)^{n-1}$ ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

4. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$이고, $a_2 = 4$일 때, a_5의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 7 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r이라고 하면

$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2$이므로

$1 : r^2 = 4 : 9$에서

$$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore\ r = \frac{3}{2}$$

$a_2 = a_1 r = 4$에서 $\frac{3}{2}a_1 = 4 \quad \therefore\ a_1 = \frac{8}{3}$

$$\therefore\ a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{2}$$

5. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$일 때, a_4의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

$a_1 \cdot a_3 \cdot a_8$

$= a \times ar^2 \times ar^7 = a^3 r^9$

$a^3 r^9 = (ar^3)^3 = 64 = 4^3$

$\therefore ar^3 = 4$

$\therefore a_4 = 4$

6. 양수 a, b에 대하여 세 수 $\log 2$, $\log a$, $\log 8$이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 a, b, 16이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$2\log a = \log 2 + \log 8$

$a^2 = 16, \quad \therefore \ a = 4$

$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore \ b = 8$

$a + b = 4 + 8 = 12$

7. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때, 수열 $\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\}$은 첫째항이 12, 공비가 2인 등비수열이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_n = ar^{n-1}$이므로
$\left\{3a_{n+1}-2a_n\right\} = 3ar^n - 2ar^{n-1}$
$= (3ar-2a)r^{n-1} = 12\cdot 2^{n-1}$
따라서 $r=2$이고 $3ar-2a=12$이다.
$6a-2a=12,\ 4a=12$
$\therefore\ a=3$

8. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열일 때, $\dfrac{a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{17}}{a_1+a_3+a_5+a_7}$의 값은?

① 3^9 ② 3^{10} ③ 3^{11} ④ 3^{12} ⑤ 3^{13}

해설

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\frac{3^{11}+3^{13}+3^{15}+3^{17}}{3+3^3+3^5+3^7}$$

$$= \frac{3^{10}(3+3^3+3^5+3^7)}{3+3^3+3^5+3^7}$$

$$= 3^{10}$$

9. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = x-3,\ a_2 = x,\ a_3 = x+6$이 성립할 때, a_5의 값은?

① 16　② 24　③ 32　④ 48　⑤ 52

해설

x는 $x-3$과 $x+6$의 등비중항이므로

$x^2 = (x-3)(x+6) = x^2 + 3x - 18$

$3x = 18 \quad \therefore x = 6$

즉, $a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

10. 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근의 등차중항을 A, 등비중항을 G라 할 때, A^2, G^2을 두 근으로 하는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 $a+b$의 값은?

① 12 ② 15 ③ 24 ④ 27 ⑤ 39

해설

$x^2-6x+3=0$에서 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3$

$\therefore A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{6}{2}=3,\ G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{3}$

이 때, A^2, G^2 즉, 9와 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-9)(x-3)=0\ \ \therefore x^2-12+27=0$

따라서 $a=-12,\ b=27$

11. 이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 α, β의 등차중항, 양의 등비중항, 조화중항을 각각 A, G, H라 할 때, A, G, H의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $A > G > H$ ② $A > H > G$ ③ $G > A > H$

④ $H > G > A$ ⑤ $H > A > G$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

따라서

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$G=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{2}$$

$$H=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\times 2}{6}=\frac{2}{3}$$

따라서 $A>G>H$이다.

12. 세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $a+b=17$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ab=8^2=64$
또, 조건에서 $a+b=17$이므로
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=17^2-2\cdot 64=161$

13. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 b, $\frac{a}{2}$, 7이 이 순서대로 등차수열을 이루고, a, -3, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a^2+b^2의 값은?

① 9 ② 33 ③ 50 ④ 67 ⑤ 81

해설

$$\frac{a}{2}=\frac{b+7}{2} \Rightarrow a-b=7$$

$$(-3)^2=ab \Rightarrow ab=9$$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2+b^2 &= (a-b)^2+2ab \\ &= 7^2+2\times 9=67\end{aligned}$$

14. 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 이룬다. 이때, $\dfrac{a_{10}}{a_9}$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 3n-1\end{aligned}$$

$a_n = 2^{3n-1}$

$\dfrac{a_{10}}{a_9}$는 공비이므로 8

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$의 값은?

$$a_n = 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots$$

① $2^{200} - 1$　② $2^{200} - 2$　③ $2^{200} - 100$

④ $2^{199} - 2^{99}$　⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$

$a_{200} = 2^{199}$

$a_{100} = 2^{99}$

$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$

16. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠~㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A=\dfrac{a+b}{2}$, $G=$ ㉠, $H=\dfrac{㉡}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a=b$일 때 성립), ㉢ $=G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$
② (㉡) - ab
③ (㉢) - $A \times H$
④ (㉣) - 등비중항
⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\ x=\frac{2ab}{a+b}$$

17. 다섯 개의 실수 a, b, c, d, e를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e가 다음 조건을 만족시킬 때, b가 이 수열의 제 n항이라 하면 n의 값은?

(가) $e = \sqrt{cd}$ (나) $\dfrac{a}{e} = \dfrac{c}{d}$ (다) $a < b$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

조건 (가)에서 $e = \sqrt{cd}$이므로 $e^2 = cd$, 즉, e는 c, d의 등비중항이므로 c, e, d 또는 d, e, c의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (나)에서 $\dfrac{a}{e} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = ce$이므로 a, c, e, d 또는 d, e, c, a의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (다)에서 $a < b$이므로 a, c, e, d, b 또는 d, e, c, a, b이므로 b는 항상 제 5항이다.

18. 두 곡선 $y=x^3+x^2+4x$와 $y=-x^2-k$가 서로 다른 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표가 등비수열을 이룰 때 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x^3+x^2+4x=-x^2-k$

$x^3+2x^2+4x+k=0$

세 근이 등비수열을 이루므로

$a,\ ar,\ ar^2$ 이라 할 수 있다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=-2$

$a\cdot ar+a\cdot ar^2+ar\cdot ar^2=4$

$a\cdot ar\cdot ar^2=-k$

이 성립한다.

$a(1+r+r^2)=-2$

$a^2r(1+r+r^2)=4$

$ar\cdot a(a+r=r^2)=4$

$ar\cdot(-2)=4,\ \ ar=-2$

$$a=\frac{-2}{r}$$

$a^3r^3=-k$ 이므로

$$\left(\frac{-2}{r}\right)^3 r^3=-k,\ \ -8=-k$$

$\therefore k=8$

19. 서로 다른 세 수 x, y, z가 차례로 등비수열을 이루고, 세 수 x, $2y$, $3z$가 차례로 등차수열을 이룰 때, $\frac{z}{x}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{6}$　　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

서로 다른 세 수 x, y, z가 차례로 등비수열을 이루므로

$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \quad \therefore y^2 = xz \cdots\cdots$ ㉠

또한, 세 수 x, $2y$, $3z$가 차례로 등차수열을 이루므로

$4y = x + 3z \quad \therefore x = 4y - 3z \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$y^2 = (4y - 3z)z$, $3z^2 - 4yz + y^2 = 0$

양변을 y^2으로 나누면

$$3\left(\frac{z}{y}\right)^2 - 4 \cdot \frac{z}{y} + 1 = 0$$

$$\left(3 \cdot \frac{z}{y} - 1\right)\left(\frac{z}{y} - 1\right) = 0$$

$\therefore \frac{z}{y} = \frac{1}{3}$ 또는 $\frac{z}{y} = 1$

그런데 $y \neq z$이므로 $\frac{z}{y} = \frac{1}{3}$

즉, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로 $\frac{z}{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

20. 네 양수 a, b, c, d가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $(a+b)(c+d) \geq 4ad$

ㄴ $a+b+c+d \geq 4\sqrt{ad}$

ㄷ 함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 역함수는 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

네 양수 a, b, c, d가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ad = bc$

ㄱ $(a+b)(c+d) = ad + bc + ac + bd$

$\geq 2ad + 2\sqrt{ac \cdot bd} = 4ad \ (\because ad = bc) \therefore$ 참

ㄴ $a+b+c+d = (a+c)+(b+d)$

$\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$

$\geq 2\sqrt{(ad+bc)+(ab+cd)}$

$\geq 2\sqrt{2ad + 2\sqrt{ab \cdot cd}} = 2\sqrt{2ad+2ad}$

$= 4\sqrt{ad} \ \therefore$ 참

ㄷ 수열 a, b, c, d의 공비를 r이라 하면

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+ar}{cx+cr} = \frac{a(x+r)}{c(x+r)} = \frac{a}{c}$$

따라서, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$는 상수함수이므로 역함수는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.