

1. 등식 $ax^2 - (2a+c)x - 1 = (b-2)x^2 + (b+3)x - c$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c 를 정할 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$(\text{준식}) = (a - b + 2)x^2 - (2a + c + b + 3)x - 1 + c = 0$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a - b + 2 = 0, 2a + c + b + 3 = 0, c = 1$$

$$\Rightarrow a = -2, b = 0, c = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

2. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x + y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{19}{4}$

⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \textcircled{1}, \quad a^2 - b = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

3. 이차방정식 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 근을 A, B (단, $A < B$)라 할 때, $3A + B$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore 3A + B = 0$$

4. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖은 것의 개수는?

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad 3x^2 - x - 1 = 0$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \quad 2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$$

$$\textcircled{\text{㉣}} \quad x^2 - x + 2 = 0$$

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

㉠ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 13 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$ 이므로 중근을 갖는다.

㉢ $D = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -13 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉣ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

5. 이차방정식 $x^2 + 4x + k = 0$ 이 허근을 가지도록 상수 k 의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k > 4$

해설

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k < 0$$

$$\therefore k > 4$$

6. 방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

7. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이

$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로

$$y = a(x - 2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$$

위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로

$$-4a = b, 4a + 5 = -3$$

$$\therefore a = -2, b = 8$$

$$\therefore a + b = 6$$

8. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$ 의 모든 근의 합을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

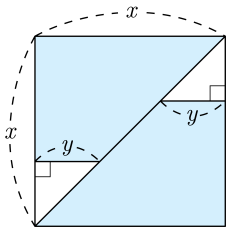
해설

$$(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x = -1, 1, 2$$

$$\therefore -1 + 1 + 2 = 2$$

9. 다음 그림은 한변의 길이가 x 인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y 에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$

② $x^2 - y^2$

③ $x^2 - y$

④ $\frac{xy - y^2}{2}$

⑤ $\frac{x - y}{2}$

해설

$$x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$$

10. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y$

② $(a + b)^2(a - b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

③ $(-x + 3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

④ $(a - b)(a^2 + ab - b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p - 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = p^{16} - 1$

해설

① $(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$

③ $(-x + 3)^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$

④ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = p^8 - 1$

11. $a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$ 을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$

② $(a-b)(b-c)(c+a)$

③ $(a-b)(a+b)(b-c)$

④ $(a-b)(a+b)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2b + b^2c - b^3 - a^2c \\ &= a^2(b-c) - b^2(b-c) \\ &= (a-b)(a+b)(b-c) \end{aligned}$$

12. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

13. 연립 방정식 $\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = 5 \\ z - x = 2 \end{cases}$ 에서 $x + y + z$ 를 구하면?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

세 다항식을 더하면, $2z = 12, z = 6$

$y + 6 = 5, y = -1$

$x + 1 = 5, x = 4$

$\therefore x + y + z = 4 - 1 + 6 = 9$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p, y = q$ 또는 $x = r, y = s$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots \textcircled{㉠} \\ xy - y^2 = 6 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $x = 2y + 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$$

$$\therefore y = 2, -3$$

$y = 2, y = -3$ 을 ㉢에 대입하면

$$\text{각각 } x = 5, x = -5$$

$$\therefore x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -5, y = -3$$

15. $a > 0$, $b < 0$, $a + b < 0$ 일 때, 다음 중 가장 큰 값은?

① a

② b

③ $a - b$

④ $-a$

⑤ $-b$

해설

$a > 0$, $b < 0$ 에서 $a > b$, $a - b > b$

$a + b < 0$ 에서 $b < -a$, $a < -b$

따라서 $b < -a < 0 < a < -b < a - b$ 이므로,

제일 큰 수는 $a - b$

16. 이차부등식 $(k-1)x^2 - 2(k-1)x - 2 > 0$ 이 해를 가지지 않도록 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 1$

② $-1 \leq k \leq 1$

③ $-1 \leq k < 1$

④ $-2 < k < 1$

⑤ $-2 \leq k \leq 1$

해설

해를 가지지 않으므로 모든 실수 x 에 대하여

$k-1 < 0$ 이고

$(k-1)x^2 - 2(k-1)x - 2 \geq 0$ 이어야 한다.

i) $k-1 < 0$ 에서 $k < 1$

ii) $(k-1)x^2 - 2(k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을

D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 + 2(k-1) \leq 0, \quad k^2 - 1 \leq 0$$

$$(k+1)(k-1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 1$$

i), ii)의 공통 범위를 구하면 $-1 \leq k < 1$

17. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$$(x + 4)(x - 2) < 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$$

$$\therefore a = -8$$

18. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0, m + n = -3$$

$$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2, m - n = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1, n = -2$

$$\therefore mn = 2$$

19. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a + bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}& \sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\&= (\sqrt{-3} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{-2}) - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\&= \sqrt{-6} \times \sqrt{-6} - \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \\&= -\sqrt{36} - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i = -6 - 2\sqrt{2}i \\&\therefore ab = 12\sqrt{2}\end{aligned}$$

20. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로

다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.

따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서

$$a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$$

$$-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$$

$$b = -3, a = 12$$

따라서 $a + b = 9$

21. $a > 0$ 일 때, $x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 모두 음수인 경우 실수 b 의 값의 범위는?

① $b < 0$

② $\frac{-a^2}{4} \leq b < 0$

③ $0 < b \leq \frac{a^2}{4}$

④ $b > 0$

⑤ $0 < b < a$

해설

$$D = a^2 - 4b \geq 0$$

$$\therefore b \leq \frac{a^2}{4}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = b > 0$$

$$\therefore 0 < b \leq \frac{a^2}{4}$$

22. x, y 가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7 \\ &= (x - 3)^2 + 2(y + 1)^2 - 4 \text{ 이므로} \\ & x = 3, y = -1 \text{ 일 때, 최솟값 } -4 \text{를 갖는다.} \end{aligned}$$

23. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여 $(a^2 + b^2)c + (a + b)c^2 = (a + b)(a^2 + b^2) + c^3$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $b = c$ 인 이등변 삼각형

② a 가 빗변인 직각삼각형

③ $a = c$ 인 이등변 삼각형

④ c 가 빗변인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 c 에 관한 내림차순으로 정리하면

$$c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2) \text{에서}$$

$$c^2\{c - (a + b)\} - (a^2 + b^2)\{c - (a + b)\}$$

$$= \{c - (a + b)\}\{c^2 - (a^2 + b^2)\}$$

$$= (c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

a, b, c 는 삼각형의 세변이므로

$$c - a - b \neq 0 \text{이고 } c^2 - a^2 - b^2 = 0$$

즉 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 c 가 빗변인 직각 삼각형이다.

24. x 의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$ 의 두 실근의 비가 $1 : 2$ 가 되도록 하는 실수 p, q 에 대하여 q 의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$

② $q > \frac{1}{2}$

③ $q \geq \frac{1}{2}$

④ $q > -\frac{1}{2}$

⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \alpha = p$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \quad \therefore \alpha^2 = 2q - 1$$

$$\text{따라서 } p^2 = 2q - 1$$

$$\text{한편 } D > 0 \text{에서 } 9p^2 - 4(4q - 2) > 0$$

$$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$$

$$2q - 1 > 0$$

$$\therefore q > \frac{1}{2}$$

25. 길이가 20m 인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\quad m^2 \quad}$

▷ 정답 : $50 \underline{m^2}$

해설

가축 우리의 세로의 길이를 x m 라고 하면

가로의 길이는 $(20 - 2x)$ m 이다.

가축 우리의 넓이를 y m^2 라고 하면

$$y = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

한편, $x > 0$ 이고 $20 - 2x > 0$ 이므로

$$0 < x < 10$$

따라서 $x = 5$ 일때

가축 우리의 최대 넓이는 $50 m^2$ 이다.