1. 첫째항이 -10, 공차가 -3인 등차수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $-3n-7$ ② $-3n-5$ ③ $-n-7$

④ $-n-5$ ⑤ $-n+3$

해설

$$a_n = -10 + (n-1)\cdot(-3) = -3n-7$$

2. 세 수 -17, x, 1이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x는 -17과 1의 등차중항이므로

$2x=-17+1=-16 \quad \therefore \ x=-8$

3. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항과 공비 r을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6} \cdot 3$ ③ $\frac{9}{2}, 9$ ④ $\frac{1}{6}, 9$ ⑤ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

해설

$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}, \ \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$$

$$\therefore a_1 = \frac{9}{2}, \ r = 9$$

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4a_5a_6 = 125$일 때, a_5의 값은?

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_4a_5a_6 = ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5 = a^3r^{12} = (ar^4)^3$이므로

$(ar^4)^3 = 125 = 5^3$

$\therefore\ a_5 = ar^4 = 5$

5. 첫째항이 1, 공비가 2, 끝항이 512 인 등비수열의 합은?

① 511 ② 512 ③ 1023 ④ 1024 ⑤ 2047

해설

$512 = 1 \cdot 2^{n-1}$ 에서 $n = 10$

$\therefore a = 1,\ r = 2,\ n = 10$

$$\therefore S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 1023$$

6. 양수 a에 대하여 $(a^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \div (a^{-\sqrt{54}})$를 간단히 하면?

① $a^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ ② $a^{\sqrt{2}}$ ③ $a^{-\sqrt{16}}$ ④ $a^{5\sqrt{6}}$ ⑤ a^{36}

해설

지수를 따로 써 보면

$2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{54} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$

$= 5\sqrt{6}$

$\therefore\ a^{5\sqrt{6}}$

7. $x = 2$ 일 때, $x^{x^{x^{x}}}$ 의 값을 구하면?

① 2^2 ② 2^4 ③ 2^8 ④ 2^{16} ⑤ 2^{32}

해설

$$x^{x^{x^{x}}} = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

8. $1+\log_9 12-\log_9 4$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\log_9 12-\log_9 4 &= 1+\log_9 9+\log_9 12-\log_9 4\\ &= \log_9(9\times 12\div 4)\\ &= \log_9 27=\log_{3^2}3^3=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

9. $(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ 0 ④ $\log_3 2$ ⑤ $\log_2 3$

해설

$$
\begin{aligned}
&(\log_3 2)(\log_4 25) - \log_9 75 \\
&= (\log_3 2)(\log_2 5) - \log_9 75 \\
&= \log_3 5 - \frac{1}{2}\log_3 75 \\
&= \log_3 \frac{5}{5\sqrt{3}} \\
&= \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

10. 양수 A 에 대하여 $\log A = -2.341$ 일 때, 정수 부분과 소수 부분을 바르게 나타낸 것은?

① 정수 부분 : -1, 소수 부분 : 0.659

② 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.341

③ 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.659

④ 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.341

⑤ 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.659

해설

$-2.341 = -2 - 0.341 = (-2-1) + (1-0.341)$

$= -3 + 0.659$

따라서 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.659 이다.

11. 다음 (　　) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,\ (\quad\quad),\cdots$

① $5-18i$　　② $5-20i$　　③ $5-24i$

④ $5-32i$　　⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을

$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면

(단, $a_k,\ b_k$는 실수)

수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고

수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.

따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$ 이다.

12. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

① 60　② 62　③ 64　④ 66　⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 5,\ d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n - 1) \times 3 = 3n + 2$

따라서 20번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

13. 등차수열 10, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{99}, -390에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,$

$b_{100} = a_{99},\quad b_{101} = -390$

$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$

$100d = -400$

$\therefore\ d = -4$

14. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　② 8　③ 11　④ 13　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

15. 첫째항이 1, 공비가 8 인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \log_2 a_n$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 135

해설

$a_n = 8^{n-1} = (2^3)^{n-1} = 2^{3n-3}$

$b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{3n-3}$

b_n은 첫째항이 0, 공차가 3 인 등차수열

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 0 + (10-1) \cdot 3\}}{2}$$

$$= 5 \cdot 27 = 135$$

16. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\left\{n+2-(n-1)\right\}}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdot 3}{3}$$

$$= n(n+1)$$

$\therefore \ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

17. 세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

세 수 1, x, 5는 이 순서로 등차수열을 이루므로
$2x=1+5=6 \quad \therefore x=3$
세 수 1, y, 5는 이 순서로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$
따라서 $x^2+y^2=14$

18. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n + 2$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 이므로

$a_{10} = S_{10} - S_9$

$= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2)$

$= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$

$= 16$

19. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$$
$$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$$
$$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$$

20. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385　　② 550　　③ 1100　　④ 1150　　⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7i}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(385+385)=385$$

21. $\sum_{k=1}^{200} \dfrac{1}{k(k+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{101}{100}$ ② $\dfrac{100}{101}$ ③ $\dfrac{200}{201}$ ④ $\dfrac{110}{101}$ ⑤ $\dfrac{201}{200}$

해설

$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{201}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

22. 다음 수열에서 $a+b$의 값을 구하여라.

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ a,\ b,\ \cdots$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11, & & 16, & & 22 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \end{array}$$

$\therefore a=16,\ b=22$

$a+b=16+22=38$

23. 다음 수열의 $\square$안에 알맞은 두 수의 합을 구하면?

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{1},\ \square,\ \square \cdots$$

① $\frac{4}{21}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{10}{21}$ ④ $\frac{14}{21}$ ⑤ $\frac{16}{21}$

해설

군으로 나눠 보면

$$\frac{1}{1} / \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1} / \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{1} /$$

따라서 $\frac{1}{7},\ \frac{2}{6}$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$$

24. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

25. $\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12

해설

$$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{\log_3 64}$$

$$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$$

26. $\log_8 3 = p,\ \log_3 5 = q$일 때, $\log_{10} 5$를 $p,\ q$로 나타내면?

① pq　② $\dfrac{p-q}{3}$　③ $\dfrac{2pq}{p+q}$

④ $\dfrac{3pq}{1+3pq}$　⑤ $\sqrt{p^2+q^2}$

해설

$$\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3}\log_2 3 = p$$

$$\therefore \log_2 3 = 3p$$

$$\log_{10} 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 10} = \frac{\log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 2} = \frac{q}{q + \frac{1}{3p}}$$

$$= \frac{3pq}{3pq+1}$$

27. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$일 때, $a + 2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

28. 수열 $1\cdot1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1)-3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

29. 2^n 을 3 으로 나눈 나머지를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12} a_k$ 의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$a_1 = 2^1$ 을 3 으로 나눈 나머지 $a_1 = 2$

$a_2 = 2^2$ 을 3 으로 나눈 나머지 $a_2 = 1$

$a_3 = 2^3$ 을 3 으로 나눈 나머지 $a_3 = 2$

$a_4 = 2^4$ 을 3 으로 나눈 나머지 $a_4 = 1$

$a_5 = 2^5$ 을 3 으로 나눈 나머지 $a_5 = 2$

즉 a_n 은 n 이 홀수일 때는 2

n 이 짝수일 때는 1

$\sum_{k=1}^{12} a_k = 6 \cdot (2+1) = 6 \cdot 3 = 18$

30. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

(준 식)$= \sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}$

$= \sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$= 4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= 2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$= 2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

31. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \cdots)$일 때, $30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$$
$$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$$

32. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 10 항은?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

$a_{n+1} - a_n = 2$의 양변에

$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{l} a_2 - a_1 = 2 \\ a_3 - a_2 = 2 \\ a_4 - a_3 = 2 \\ \quad\vdots \\ \underline{+)\,a_n - a_{n-1} = 2} \\ a_n - a_1 = 2(n-1) \end{array}$$

$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$

$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차 수열이므로 $a_n = 2n + 1$

$\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

33. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_{10} = a_9 + 9^2 \\ \hline \end{array}$$

$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$

$= 5 + \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$

$= 290$

34. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)}$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

35. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로
$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① $1,\ \frac{1}{2}$ ② $1,\ 2$ ③ $2,\ \frac{1}{2}$ ④ $2,\ 2$ ⑤ $3,\ \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

36. $A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$, $B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$ 일 때, AB의 값은?

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$$A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$$
$$=(\log_3 3^3)(\log_4 3^3+\log_{2^{-1}}3^{-1})$$
$$=(2\log_3 3^3)(\frac{2}{2}\log_2 3+\frac{-1}{-1}\log_2 3)$$
$$=2(\log_2 3+\log_2 3)=2\cdot\log_2 3=4\log_2 3$$

$$B=(\log_{\sqrt{3}}5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25}8)$$
$$=(\log_{3^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^2}5)(\log_5 2^6+\log_{5^2}2^3)$$
$$=(2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5)(6\log_5 2+\frac{3}{2}\log_5 2)$$
$$=\frac{5}{2}\log_3 5\cdot\frac{15}{2}\log_5 2$$
$$=\frac{75}{4}\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$$
$$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}5}$$
$$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{75}{4}\log_3 2$$
$$\therefore\ AB=4\log_2 3\cdot\frac{75}{4}\log_3 2$$
$$=4\cdot\frac{75}{4}\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=75$$

37. $\log \dfrac{x}{4.71} = 1.9812$를 만족하는 양수 x의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	$\cdots$
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	$\cdots$
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

▶ 답 :

▷ 정답 : 451

해설

$\log x$의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$\log \dfrac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812$이므로

$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$이므로 $x = 451$

38. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 일 때, 3^4 는 몇 자리 정수인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\log 3^4 = 4\log 3$

$= 4 \times 0.4771 = 1.9084$

따라서 $\log 3^4$ 의 지표는 1 이므로 3^4 은 2자리 정수이다.

39. 등차수열 $\log 100,\ \log\dfrac{100}{2},\ \log\dfrac{100}{4},\ \log\dfrac{100}{8},\cdots$ 은 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 처음으로 음수가 되는가?

① 제 11항 ② 제 13항 ③ 제 15항

④ 제 17항 ⑤ 제 19항

해설

주어진 등차수열의 각 항을 정리해서 나열해 보면

$2, 2-\log 2, 2-2\log 2, 2-3\log 2, \cdots$

즉, 이 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 $-\log 2$ 인 등차수열이므로

첫째항부터 제 n 항까지의 합이 음수가 되려면

$$\frac{n\left\{2\cdot 2+(n-1)\cdot(-\log 2)\right\}}{2}<0$$

$$n\left\{(-\log 2)n+(4+\log 2)\right\}<0$$

$$n\left\{(\log 2)n-(4+\log 2)\right\}>0$$

$$n>\frac{4+\log 2}{\log 2}=\frac{4.3010}{0.3010}=14.\times\times\times$$

따라서 주어진 수열은 첫째항부터 제15항까지의 합이 처음으로 음수가 된다.

40. 연이율 5% 의 복리로 이자를 계산하는 정기예금에 1000 만 원을 20 년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, $\log 1.05 = 0.02$, $\log 2.51 = 0.40$ 으로 계산한다.)

① 2100만원 ② 2110만원 ③ 2130만원

④ 2150만원 ⑤ 2170만원

해설

1000만원을 20년 동안 연이율의 5% 의 복리로 예금하였을 때의 원리합계는

$1000(1+0.05)^{20} = 1000 \times 1.05^{20}$(만원)

1.05^{20} 에 상용로그를 취하면

$\log 1.05^{20} = 20 \log 1.05 = 20 \times 0.02 = 0.4$

이때, $\log 2.51 = 0.40$ 이므로 $1.05^{20} = 2.51$

따라서 구하는 원리합계는 $1000 \times 2.51 = 2150$(만원)

41. 일차 이상의 다항식 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$을 $3x - 1$로 나눈 나머지를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 $\frac{p}{4} - \frac{1}{q}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ (p, q는 자연수)로 나타낼 때, $p + q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$f(x)$를 $3x - 1$로 나눈 나머지는

$$a_n = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{3}{2} \times 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 15 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \frac{59}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$\therefore\ p + q = 59 + 4 = 63$

42. 첫째항이 1000이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 곱을 Π_n, 즉, $\Pi_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$이라 할 때, Π_n이 최대가 될 때의 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

첫째항이 1000 이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n은

$$a_n = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

어떤 수에 1보다 큰 값을 곱하면 곱은 커지고, 1보다 작은 값을 곱하면 곱이 작아지므로

$a_n \geq 1$인 모든 항들을 곱할 때 Π_n은 최댓값을 갖는다.

따라서, $a_n = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 에 대하여

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{1}{512}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$ 이므로

$n - 1 \leq 9$, 즉, $n \leq 10$일 때, $a_n \geq 1$을 만족한다.

그러므로 Π_n이 최대가 될 때의 n의 값은 10이다.

43. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1,\ a_2 = 3$이고,
$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

① 196 ② 198 ③ 200 ④ 202 ⑤ 204

해설

$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}$에서
$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$
$\therefore\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{1} = 3$이므로

$\therefore\ a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k = 3^4 + \dfrac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$
$= 81 + 121 = 202$

44. $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은 $\dfrac{n}{m}$(m, n은 서로소인 자연수)이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 69

해설

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$이므로 수열 $\{a_n\}$의 계차

수열의 일반항은 $\dfrac{1}{n(n+1)}$이다.

$a_n=5+\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k(k+1)}=5+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=5$

$+\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

$=5+1-\dfrac{1}{n}=6-\dfrac{1}{n}$

따라서, $a_{10}=\dfrac{59}{10}$이므로 $m+n=69$

45. 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

㉠ -8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{-8}$이다.

㉡ $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$이다.

㉢ $a < 0$ 일 때, $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ 이다.

㉣ n이 2 이상인 홀수일 때, 실수 a에 대하여 $x^n = a$를 만족하는 실수 x는 1개다.

㉤ $a < 0$ 일 때, $\sqrt[4]{a^4} + \sqrt[3]{(-a)^3} = 0$ 이다.

① ㉠, ㉡, ㉢　② ㉠, ㉡, ㉣　③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉤　⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ (거짓) -8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{-8},\ 1 \pm \sqrt{3}i$이다.

㉡ (참)

㉢ (참)

㉣ (참)

㉤ (거짓) $(-a) + (-a) = -2a$

46. $\dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \dfrac{1}{11}$ 일 때, $9^x + 9^{-x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{61}{30}$

해설

$$\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{1}{11} = \frac{(3^x - 3^{-x})3^x}{(3^x + 3^{-x})3^x} = \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \frac{9^x - 1}{9^x + 1} = \frac{1}{11}$$

$$11(9^x - 1) = 9^x + 1$$

$$10 \times 9^x = 12$$

$$9^x = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 9^x + 9^{-x} = \frac{6}{5} + \frac{5}{6} = \frac{61}{30}$$

47. $42^a = 7,\ 42^b = 3$일 때, $14^{\frac{a+b}{1-b}}$의 값은?

① 3　　② 7　　③ 10　　④ 14　　⑤ 21

해설

$42^a = 7,\ 42^b = 3$에서 두 식을 곱하면 $42^{a+b} = 21 \cdots$ ㉠

$42^b = 3,\ 42 \div 42^b = 42 \div 3$이므로 $42^{1-b} = 14 \cdots$ ㉡

㉡에서 $42 = 14^{\frac{1}{1-b}},\ 42^{a+b} = (14^{\frac{1}{1-b}})^{a+b} = 14^{\frac{a+b}{1-b}}$

㉠에서 $42^{a+b} = 21$이므로 $14^{\frac{a+b}{1-b}} = 21$

48. A 지역과 B 지역의 바다에서는 바닷물 속으로 내려갈수록, 빛의 세기가 각각 일정한 비율로 감소한다. A 지역의 바다에서는 빛이 바닷물 속을 200m 통과할 때마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하였고, B 지역의 바다에서는 바닷물 속을 150m 통과할 때마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하였다. 빛이 바닷물 속을 600m 통과할 때, A 지역과 B 지역에서의 빛의 세기의 비를 구하면?(단, B 지역의 해수면의 빛의 세기는 A 지역의 해수면의 빛의 세기의 2 배이다.)

① 25 : 4 ② 25 : 6 ③ 25 : 7 ④ 25 : 8 ⑤ 25 : 9

해설

A 지역의 해수면에서의 빛의 세기를 a라 하면 B 지역의 해수면의 빛의 세기는 $2a$이다.

A 지역의 빛의 세기	a		$a(0.16)$	
수심	0	150	200	300
B 지역의 빛의 세기	$2a$	$2a(0.16)$		$2a(0.16)^2$

A 지역의 빛의 세기	$a(0.16)^2$		$a(0.16)^3$
수심	400	450	600
B 지역의 빛의 세기		$2a(0.16)^3$	$2a(0.16)^4$

또한 A 지역은 200m 마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하므로 600m 에서의 빛의 세기는 $(0.16)^3a$이며, B 지역은 150m 마다 빛의 세기가 84% 씩 감소하므로 600m 에서의 빛의 세기는 $(0.16)^4 \cdot 2a$이다.

따라서, 빛이 600m 를 통과할 때, A 지역과 B 지역에서의 빛의 세기의 비는

$(0.16)^3a : (0.16)^4 \cdot 2a = 1 : 0.16 \times 2 = 100 : 32 = 25 : 8$

49. $\log x$의 정수 부분이 3이고 $\log x$의 정수 부분과 $\log \frac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같도록 하는 모든 x의 값들의 곱은? (단, $\log x$의 소수 부분은 0이 아니다.)

① $10^{\frac{19}{4}}$ ② $10^{\frac{17}{3}}$ ③ $10^{\frac{20}{3}}$ ④ 10^7 ⑤ $10^{\frac{31}{4}}$

해설

$\log x$의 정수 부분이 3이고 $\log x$의 소수 부분은 0이 아니므로

$3 < \log x < 4 \cdots$ ㉠

$\log x$와 $\log \frac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같으므로 $\log x - \log \frac{1}{x^2}$는 정수이어야 한다.

$\log x - \log \frac{1}{x^2} = \log x + 2\log x = 3\log x$(정수)

㉠에 의하여 $9 < 3\log x < 12$이므로

$3\log x = 10$ 또는 $3\log x = 11$

$\log x = \frac{10}{3}$ 또는 $\log x = \frac{11}{3}$

$\therefore x = 10^{\frac{10}{3}}$ 또는 $x = 10^{\frac{11}{3}}$

따라서 구하는 x 값들의 곱은

$10^{\frac{10}{3}} \cdot 10^{\frac{11}{3}} = 10^{\frac{21}{3}} = 10^7$

50. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A에서 B로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F는 $\mathrm{F} = 10\log\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)$ (데시벨)로 정의한다. 전파감쇄비가 -7(데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}} = 2$로 계산한다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$-7 = 10\log\frac{B}{A}$$

$$-\frac{7}{10} = \log\frac{B}{A}$$

$$\frac{B}{A} = 10^{-\frac{7}{10}} = 10^{-1} \times 10^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$