1. 다음 중 $\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1+x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}$ 를 간단히 나타낸 것은?

① $-1-2x$ ② $1-2x$ ③ $1+2x$
④ $-1+2x$ ⑤ $2x$

해설

$$(\text{분자})=\frac{x^2-(1+x)^2}{x(x+1)}=\frac{-1-2x}{x(x+1)}$$

$$(\text{분모})=\frac{x^2+(1-x)(1+x)}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore \frac{\dfrac{-1-2x}{x(x+1)}}{\dfrac{1}{x(x+1)}}=\frac{-1-2x}{x(x+1)}\times x(x+1)=-1-2x$$

2. $x-y<0,\ xy<0$일 때, $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$를 간단히 하면?

① $2x$　② $2y$　③ $-2x$

④ $-2y$　⑤ $2x-2y$

해설

$x-y<0,\ xy<0 \Rightarrow x<0,\ y>0$

$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+\sqrt{x^2}-|y|$

$=\sqrt{(x-y)^2}+|x|-|y|$

$=|x-y|+|x|-|y|$

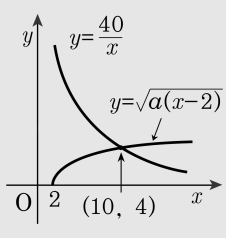
$=-(x-y)-x-y=-2x$

3. 함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x}(x > 0)$이 만나는 점의 x좌표가 10일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동시키면
$y = \sqrt{a(x-2)}$
이 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x}$ 이 만나는 점의
x좌표는 10이므로
y좌표는 $y = \frac{40}{10} = 4$
즉 교점의 좌표는 $(10, 4)$
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면
$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$
$\therefore a = 2$



4. $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$의 값은?

① 20 ② $\sqrt{401}$ ③ $\sqrt{402}$ ④ $\sqrt[4]{401}$ ⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$$
$$=\sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2}$$
$$=\sqrt{\sqrt{401}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{401}-1}=\sqrt{401-1}=20$$

5. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})\{(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}\}}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$ ② $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$

③ $(x+y+z)^{-2}$ ④ $\dfrac{1}{xyz}$

⑤ $\dfrac{1}{xy+yz+zx}$

해설

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\\
&\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\\
&=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)\\
&\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)\\
&=\left(\frac{1}{xyz}\right)^{2}=x^{-2}y^{-2}z^{-2}
\end{aligned}$$

6. 다음은 $\dfrac{x^2-x-3}{x-1}-\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ 를 계산하는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 차례대로 구하고 풀이를 완성하여 그 값을 바르게 구한 것은?

$$\frac{x^2-x-3}{x-1}=(㉠)+\frac{(㉡)}{x-1}$$
$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=(㉢)+\frac{(㉣)}{x+1}$$

① $-x, +3, x, -1, \dfrac{2x+4}{x^2-1}$
② $x, -3, x, -1, -\dfrac{2x+4}{x^2-1}$
③ $x, 3, x, 1, -\dfrac{2x+4}{x^2+1}$
④ $x, -1, x, -3, -\dfrac{2x-4}{x^2-1}$
⑤ $x, 1, x, 3, -\dfrac{2x+4}{x^2+1}$

해설

$$\frac{x^2-x-3}{x-1}=\frac{x(x-1)-3}{x-1}=x+\frac{-3}{x-1}$$
$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{x(x+1)-1}{x+1}=x+\frac{-1}{x+1}$$
$\therefore$ ① $=x$, ② $=-3$, ③ $=x$, ④ $=-1$

$$(\text{준식})=x-\frac{3}{x-1}-\left(x-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}$$
$$=\frac{x-1-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=-\frac{2x+4}{x^2-1}$$

7. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}=\dfrac{a}{100}$, $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 101}=\dfrac{b}{101}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 149

해설

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}\\
&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\\
&\quad\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}\\
&=\frac{99}{100}=\frac{a}{100}\\
&\therefore\ a=99\\
&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\\
&\quad\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}=\frac{b}{101}\\
&\therefore\ b=50\\
&\therefore\ a+b=149
\end{aligned}$$

8. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 140

해설

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{n\{2 \cdot 5 + (n-1)4\}}{2} = n(2n+3)$

$\therefore\ b_n = \dfrac{n(2n+3)}{n} = 2n + 3$(단, $n \neq 0$)

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $b_1 = 2 + 3 = 5$이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$인 등차수열이다.

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \dfrac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$

9. 4와 6으로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 41400

해설

4와 6으로 나누어떨어지는 수는 4와 6의 최소공배수인 12로 나누어떨어지는 수이므로 $12n$(n은 자연수)의 꼴이다.
이때, $100 \le 12n \le 1000$이므로
$8.\times\times \le n \le 83.\times\times$
$\therefore\ n = 9, 10, 11, \cdots, 83$
그런데 $n = 9$일 때, $12n = 108$,
$n = 83$일 때, $12n = 996$이므로 조건을 만족하는 수는 첫째항이 108, 끝항이 996, 항수가 $83 - 8 = 75$인 등차수열이다.
따라서 구하는 총합은 $\frac{75(108 + 996)}{2} = 41400$

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.
$a_n = 2n + 1,\ b_n = 3n + 2 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때, C_{20}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 119

해설

$a_2 = b_1 = 5,\ a_5 = b_3 = 11,\ a_8 = b_5 = 17, \cdots$ 이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.
$\therefore\ c_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119$

11. 갑은 2001년 말부터 2012년까지 매년 초에 300만원 씩 모두 12회를 금융기관에 적립한 것을 2012년 말에 그 원리금을 모두 인출하고 그대로 2013년 초에 금융기관에 다시 예금하여 12년 동안 두었다가 2024년 말에 그 원리금을 모두 인출하기로 하였다. 이때, 갑이 2024년말에 인출한 원리금액은?(단, 연이율 6%의 복리로 하고, $1.06^{12} = 2.01$로 계산한다.)

① 약 10540만 원 ② 약 10650만 원 ③ 약 10760만 원
④ 약 10870만 원 ⑤ 약 10980만 원

해설

2012년 말의 원리금 S_{12}를 구하면

$S_{12} = 300 \times 1.06 + 300 \times 1.06^2 + \cdots + 300 \times 1.06^{12}$

$= \dfrac{300 \times 1.06 \times (1.06^{12} - 1)}{1.06 - 1}$

$= \dfrac{300 \times 1.06 \times 1.01}{0.06} = 5353$(만원)

따라서 2024년 말의 원리금을 구하면

$S_{24} = S_{12} \times 1.06^{12}$

$= 5353 \times 2.01 = 10759.53$(만 원)

따라서 구하는 금액은 약 10760만 원이다.

12. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$$

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,
(우변)$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.
(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)$을 곱하면

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{k+1}{2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2}=\frac{(\square)+1}{2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

▶ 답:

▷ 정답: $k+1$

해설

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,
(우변)$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$을 곱하면

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{k+1}{2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)+1}{2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

13. 집합 $A=\left\{(x,\ y)\,|\,y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x},\ x,\ y\text{ 는 실수}\right\}$ 에 대하여 $(a,\ b)\in A$ 일 때, 보기에서 집합 A 의 원소를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2a,\ b^2)$ ㉡ $\left(a-2,\ \frac{b}{4}\right)$ ㉢ $\left(\frac{a}{3},\ \sqrt[3]{b}\right)$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $(a,b)\in A$ 에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{a}$ 이므로

$b^2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{a}\right\}^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2a}$

$\therefore (2a,\ b^2)\in A$

㉡. $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{a}$ 에서

$\frac{b}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+2}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^{a-2}$

$\therefore \left(a-2,\ \frac{b}{4}\right)\notin A$

㉢. $(a,\ b)\in A$ 에서 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{a}$ 이므로

$\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{a}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{a}\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{3}}\quad\therefore \left(\frac{a}{3},\ \sqrt[3]{b}\right)\in A$

따라서 집합 A 의 원소인 것은 ㉠, ㉢이다.

14. 1이 아닌 세 자연수 x, y, z가 다음 두 식을 만족한다.

㉠ $\log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{5}{3}$
㉡ $\log_y z \log_z x + \log_z x \log_x y + \log_x y \log_y z = \frac{5}{3}$

이때, $(\log_y z)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$의 값을 구하면?

① $-\frac{20}{9}$ ② $-\frac{11}{9}$ ③ $-\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 1

해설

$\log_y z = A, \log_z x = B, \log_x y = C$라 하면

$\log_z y = \frac{1}{A}, \log_x z = \frac{1}{B}, \log_y x = \frac{1}{C}$이므로

$A + B + C = \frac{5}{3}$에서 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{AB + BC + CA}{ABC}$

이므로 $AB + BC + CA = \frac{5}{3}$

$\therefore\ (\log_z y)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$

$= A^2 + B^2 + C^2$

$= (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA)$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{5}{9}$

15. 3^{30} 은 n 자리 자연수이고 가장 큰 자리의 숫자가 a 이다. 이때, $n+a$ 의 값을 구하여라. (단, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4471$ 로 계산한다.)

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$\log_{10} 3^{30} = 30 \log_{10} 3$
$= 30 \times 0.4771 = 14.313$

$\log_{10} 3^{30}$ 의 지표가 14 이므로 3^{30} 은 15 자리 자연수이다. 즉, $n = 5$ 이다.

한편, $\log_{10} 3^{30}$ 의 가수는 0.313

$0.3010 = \log_{10} 2 < 0.313 < \log_{10} 3 = 0.4771$

따라서, 3^{30} 의 숫자의 배열은 $\underbrace{2 \times \times \times \cdots \times}_{14개}$ 이므로 가장 큰 숫자는 2 이다.

즉, $a = 2$ 이다.

$\therefore n + a = 15 + 2 = 17$

16. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 $\log_a b$와 $\log_b a$의 정수 부분이 같고 소수 부분의 합이 1이다. $\log_a a^3b^2$의 정수 부분이 17일 때, ab의 값은?

① 10^5 ② 10^6 ③ 10^7 ④ 10^8 ⑤ 10^9

해설

$\log_a a$와 $\log_b b$의 정수 부분이 같으므로

$\log_a a = n+\alpha(0 \le \alpha < 1), \log_b b = n+\beta(0 \le \beta < 1)$라 하자.

$\log_a a^3b^2 = 3\log_a a + 2\log_b b$

$= 3(n+\alpha) + 2(n+\beta)$

$= 5n + 3\alpha + 2\beta$

$= 5n + 2(\alpha+\beta) + \alpha$

$= 5n + 2 + \alpha (\because\ \alpha+\beta = 1)$

$\log_a a^3b^2$의 정수 부분이 17이므로 $5n+2 = 17$

$5n = 15,\ n = 3$

따라서 $\log_a a = 3+\alpha,\ \log_b b = 3+\beta$이므로

$a = 10^{3+\alpha},\ b = 10^{3+\beta}$

$ab = 10^{3+\alpha} \cdot 10^{3+\beta} = 10^{\alpha+\beta+6} = 10^7$

17. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}=S$ 라고 할 때, $\frac{1}{1\times 2007}+\frac{1}{2\times 2006}+\frac{1}{3\times 2005}+\cdots+\frac{1}{2006\times 2}+\frac{1}{2007\times 1}$ 의 값을 S 로 나타내면?

① $\frac{S}{1003}$ ② $\frac{S}{1004}$ ③ $\frac{S}{2006}$
④ $\frac{S}{2007}$ ⑤ $\frac{2006}{2007}S$

해설

주어진 식의 각 항의 분모가 $A\times B$ 의 꼴이고
$A+B=2008$ 로 일정하므로
$\frac{1}{AB}=\frac{1}{A+B}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용한다.
∴(주어진 식)

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2007}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2006}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2005}\right)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2006}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2008}\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{1}\right)\\
&=\frac{1}{2008}\left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{2007}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\right\}\\
&=\frac{2}{2008}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)\\
&=\frac{S}{1004}
\end{aligned}$$

18. 수도꼭지 A, B, C 세 개가 달려있는 목욕탕 욕조에 물을 가득 채우는데, A 와 B 를 동시에 사용하면 p 분, B 와 C 를 동시에 사용하면 q 분, C와 A 를 동시에 사용하면 r 분이 걸린다고 한다. A, B, C 를 동시에 사용하면 몇 분이면 가득 차는가?

① $p+q+r$ ② $\frac{pq+qr+rp}{p+q+r}$ ③ $\frac{2pqr}{pq+qr+rp}$

④ $\frac{p+q+r}{pq+qr+rp}$ ⑤ $\frac{pqr}{pq+qr+rp}$

해설

욕조의 부피를 V , 수도꼭지 A, B, C 에서 매 분 나오는 물의 양을 a, b, c 라 하면

$\frac{V}{a+b}=p\cdots$㉠

$\frac{V}{b+c}=q\cdots$㉡

$\frac{V}{c+a}=r\cdots$㉢

㉠에서 $a+b=\frac{V}{p}\ \cdots$㉠'

㉡에서 $b+c=\frac{V}{q}\ \cdots$㉡'

㉢에서 $c+a=\frac{V}{r}\ \cdots$㉢'

㉠' + ㉡' + ㉢' 을 하면

$2(a+b+c)=\frac{grV+prV+pqV}{pqr}$

$\therefore a+b+c=\frac{pqV+qrV+rpV}{2pqr}$

구하는 값은 $\frac{V}{a+b+c}$ 이므로

$\frac{V}{\frac{pqV+qrV+rpV}{2pqr}}=\frac{2pqr}{pq+qr+rp}$(분)

19. $a=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}},\ b=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 6　② 8　③ 10　④ $10\sqrt{2}$　⑤ $10\sqrt{5}$

해설

$a=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}},\ b=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ 이므로
$a^3=7-5\sqrt{2},\ b^3=7+5\sqrt{2}\quad\therefore\ a^3+b^3=14$
그리고 $ab=\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})}=-1$ 이므로
$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ 에서 $a+b=t$ 라 하면
$t^3=14-3t,\ t^3+3t-14=0$
$(t-2)(t^2+2t+7)=0$
$\therefore\ t=2\ (\because\ t^2+2t+7\neq 0)$
$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2+2=6$

20. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}, 10$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20}, 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{20}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{209}{189}$ ② $\dfrac{11}{189}$ ③ $\dfrac{209}{11}$ ④ $\dfrac{198}{209}$ ⑤ 1

해설

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{10}, 10$의 공차를 p라 하면

$1+11p=10 \Rightarrow p=\dfrac{9}{11}$

$1,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{20},\ 10$의 공차를 q라 하면

$1+21q=10 \Rightarrow q=\dfrac{9}{21}$

$\therefore\ \dfrac{a_{10}-a_1}{b_{20}-b_1}=\dfrac{9p}{19q}=\dfrac{9\cdot\frac{9}{11}}{19\cdot\frac{9}{21}}=\dfrac{189}{209}$

21. 함수 $f(n)$이 $f(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & (n\text{이 짝수일 때}) \\ 1 & (n\text{이 홀수일 때}) \end{cases}$ 로 정의될 때, $\sum_{m=1}^{100} f(m^2)$의 값은?

① 2500 ② 2550 ③ 2600 ④ 2650 ⑤ 2700

해설

m이 짝수이면 m^2도 짝수이고, m이 홀수이면 m^2도 홀수이므로 m이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나눠서 계산한다.

(i) $m = 2k(k = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 50)$일 때,

$f((2k)^2) = f(4k^2) = \sqrt{4k^2} = 2k$

(ii) $m = 2k - 1(k = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 50)$일 때,

$f((2k-1)^2) = f(4k(k-1)+1) = 1$

$\therefore \sum_{m=1}^{100} f(m^2)$

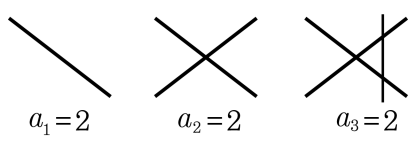
$= \sum_{k=1}^{50} f((2k-1)^2) + \sum_{m=1}^{50} f((2k)^2)$

$= \sum_{k=1}^{50} 1 + \sum_{k=1}^{50} 2k$

$= 50 + 50 \times 51$

$= 2600$

22. 그림과 같이 직선을 그어 평면을 나눌 때, 어느 두 직선도 서로 평행하지 않도록 10개의 직선을 그어 생기는 평면의 개수의 최댓값은?



① 56 ② 57 ③ 58 ④ 59 ⑤ 60

해설

$2,\quad 4,\quad 7,\quad 11,\cdots$

$\quad\vee\quad\vee\quad\vee$

$\quad 2\quad 3\quad 4$

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$= 2 + \dfrac{(n-1)n}{2} + (n-1)$

$a_n = \dfrac{(n-1)n}{2} + n + 1$

$\therefore a_{10} = \dfrac{9\cdot 10}{2} + 10 + 1 = 56$

23. 1이 아닌 서로 다른 두 수 a, b에 대하여 다음과 같이 양수로 이루어진 수열이 있다.

$a,\ b,\ a^2,\ ab,\ b^2,\ a^3,\ a^2b,\ ab^2,\ b^3, \cdots$

이 수열의 첫째항 a부터 $a^m b^n$까지의 합을 $S(m,\ n)$이라 할 때, 보기 중 옳은 것만을 고른 것은?

보기

㉠ $a^{10}b^7$은 이 수열의 제160항이다.

㉡ 첫째항부터 제100항까지 모든 항의 곱은 $a^{554}b^{510}$이다.

㉢ $S(n,\ n+4) - S(n+4,\ n) = a^n b^n \times \dfrac{a^4 - b^4}{a - b}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 수열을

$(a,\ b),\ (a^2,\ ab,\ b^2),\ (a^3,\ a^2b,\ ab^2,\ b^3),\ \cdots$

으로 묶으면 각 군에 속한 식의 차수가 모두 같으므로 제n군에 속한

식의 차수는 모두 n이고, 항의 개수는 $n+1$이다.

㉠ $a^{10}b^7$은 차수가 17로 제17군의 8번째 수이다. $\therefore (2+3+4+\cdots+17)+8 = \left(\dfrac{16\cdot 19}{2} - 1\right) + 8 = 160$ 즉, 제160항이다. (참)

㉡ $\dfrac{14\cdot 15}{2} - 1 = 104$이므로 제100항은 제13군의 끝에서 5번째 항이다. 제1군부터 제13군까지 모든 항을 곱하면 a의 차수와 b의 차수가 같고, a의 차수는 $1 + (2+1) + (3+2+1) + \cdots + (13+12+\cdots+1) = \sum_{k=1}^{13} \dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{13\cdot 14\cdot 27}{6} + \dfrac{13\cdot 14}{2}\right) = 455$

따라서 첫째항부터 제100항까지의 곱은 제13군의 끝에서 4, 3, 2, 1번째항 $a^3b^{10},\ a^2b^{11},\ ab^{12},\ b^{13}$의 곱을 제외하면 $a^{455-(3+2+1+0)}b^{455-(13+12+11+10)} = a^{449}b^{409}$(거짓)

㉢ $S(n,\ n+4) - S(n+4, n)$

$= a^{n+3}b^{n+2} + a^{n+2}b^{n+2} + a^{n+1}b^{n+3} + a^n b^{n+4}$

$= a^n b^{n+1}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$= a^n b^{n+1} \times \dfrac{a^3\left\{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^4\right\}}{1 - \dfrac{b}{a}}$

$= a^n b^{n+1} \times \dfrac{a^4 - b^4}{a - b}$ (거짓)

24. $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분이 서로 같은 x의 값은 몇 개 존재하는가?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\log x = n + \alpha \ (0 \le \alpha < 1)$
$2\log x = 2n + 2\alpha$
$0 \le 2\alpha < 2$
(i) $0 \le 2\alpha < 1$ 일 때
$\alpha = 2\alpha \ \ \therefore \alpha = 0$
$\log x = n$
$x = 10^n$
$10 \le 10^n < 1000$
$n = 1$ or 2
$\therefore x$는 2개
(ii) $1 \le 2\alpha < 2$ 일 때
$\alpha = 2\alpha - 1$
$1 = \alpha$
그런데 $0 \le \alpha < 1$ 이므로 모순
$\therefore x$는 2개

25. $a_1 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 3\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = -22$를 만족시키는 자연수 k의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20, 공차가 -3인 등차수열이므로
$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$
즉, $a_k = -3k + 23 = -22$에서 $-3k = -45$
$\therefore k = 15$