1. 다항식 $6x^3-7x^2+17x-3$을 $3x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1)+R$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설
$6x^3-7x^2+17x-3=(3x-2)Q(x)+R$
양변에 $x=1$을 대입하면, $13=Q(1)+R$
$\therefore\ Q(1)+R=13$

해설
$6x^3-7x^2+17x-3$를 $3x-2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

2. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$
$\therefore\ k = 6$

4. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $\mathrm{A} \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A \blacktriangledown (B \triangle A) &= A \blacktriangledown (2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

5. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

6. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{} = A$ 라 하면

$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$

$\therefore\ A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

$\therefore\ A = x^2 + 2x - 1$ 이므로

$\boxed{}$ 안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1 이다.

7. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x + 1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$
② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$
④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x + 1)^2 + 1$

$2x + 1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

8. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$　② $a+b=x+y$　③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$　⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ 을
간단히 정리하면
$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$
즉, $(ay-bx)^2=0$
$\therefore\ ay-bx=0 (\because\ a,\ x,\ b,\ y$ 는 실수)
따라서, $ay=bx$ 에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

9. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$의 전개식에서 x^3의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

10. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

11. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 $x,\ y,\ z$라 하면

$x+y+z=22\cdots\cdots$①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14\cdots\cdots$②이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

12. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

13. $x^2-x+1=0$일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-x+1=0$, 양변에 $x+1$을 곱하면,
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$x^3+1=0$, $x^3=-1$에서 $x^5=x^3\times x^2=-x^2$
$x^5+\frac{1}{x^5}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\cdots$①
$x^2-x+1=0$를 x로 나누어 정리한다.
$x+\frac{1}{x}=1$
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1$
① 에 대입하면, $x^5+\frac{1}{x^5}=1$

14. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,
$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$
$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$
$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
$a=3,\ b=6-a=3$
$\therefore\ 2a+b=2\times3+3=9$

15. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots$①
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots$②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ a+b=-7$

16. k의 값에 관계없이$(2k^2 - 3k)x - (k+2)y - (k^2 - 4)z = 28$이 항상 성립하도록 x, y, z의 값을 정할 때, $3x + y + z$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면

$(2x - z)k^2 - (3x + y)k - (2y - 4z + 28) = 0$

$\therefore\ 2x - z = 0, 3x + y = 0, 2y - 4z + 28 = 0$

$z = 2x,\ y = -3x$ 을 $2y - 4z + 28 = 0$에 대입하면

$x = 2,\ y = -6,\ z = 4$

$\therefore\ 3x + y + z = 4$

17. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 $x,\ y$ 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$ 라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

$x,\ y$ 에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 $x,\ y$ 에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

18. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=3$ ② $b=2$ ③ $c=-1$

④ $d=-3$ ⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

19. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4　　② 8　　③ 12　　④ 15　　⑤ 16

해설

(준식)$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
(준식) $= X(X+8)+a$
$\quad = X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

20. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$　② 0　③ $3^{2007}+1$
④ 1　⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

21. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
$f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
$\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

22. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3　　② $3x+3$　　③ $3x-3$

④ $6x-9$　　⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$
$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$
$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$
$a=6,\ b=-9$
$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

23. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0 ② α ③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$ ⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&\ \ \vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+ \\
&\qquad \cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$
$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

24. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $x+f(x)$ ㄴ $x^2+f(x)g(x)$

ㄷ $f(g(x))-x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$
두식을 연립하면, $f(-2)=2,\ g(-2)=-2$
ㄱ : $x+f(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면
$-2+f(-2)=0$
ㄴ : $x^2+f(x)g(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$
ㄷ : $f(g(x))-x \rightarrow x=-2$를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

25. 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$는? (단, a, b는 서로 다른 실수)

① $af(a)+bf(b)$
② $-af(a)+bf(b)$
③ $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$
④ $\dfrac{bf(a)-af(b)}{a-b}$
⑤ $bf(a)-af(b)$

해설

$R(x)=cx+d$라 하면

$f(a)=ac+d,\ f(d)=bc+d$

$\therefore\ f(a)-f(b)=(a-b)c$

$\therefore\ c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

또 $f(a)+f(b)=(a+c)c+2d$

$=\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}+2d$

$\therefore\ 2d=f(a)+f(b)-\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}$

$=\dfrac{(a-b)\left\{f(a)+f(b)\right\}}{a-b}-\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}$

$=\dfrac{1}{a-b}\Big[af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-\left\{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)\right\}\Big]$

$=\dfrac{1}{a-b}\left\{af(a)+af(b)-bf(a)-bf(b)-af(a)+af(b)-bf(a)+bf(b)\right\}=\dfrac{2af(b)-2bf(b)}{a-b}$

$\therefore\ d=\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

따라서 $R(a+b)=(a+b)c+d$

$=(a+b)\times\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)\left\{f(a)-f(b)\right\}}{a-b}+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-af(b)+bf(a)-bf(b)+af(b)-bf(a)}{a-b}$

$=\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}$