

1. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

- ① $a = 1, b = -1$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = -1$

- ④ $a = 2, b = 0$ ⑤ $a = -1, b = 2$

해설

f 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y = ax + b$ 가

점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

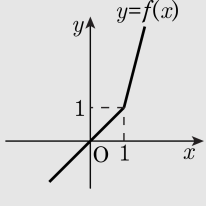
또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선

$y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 주어진 보기 중 ①, ②을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



3. 다음 중 일반적으로 성립하는 성질이 아닌 것은 무엇인가?

① $g \circ f = f \circ g$

② $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

③ $(f^{-1})^{-1} = f$

④ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

⑤ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

해설

함성함수의 성질에서
교환법칙은 성립하지 않는다.

4. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$ 이 성립할 때 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$ 에서
 $f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$ 이므로
 $\therefore g^{-1}(a) = 1$ 에서 $a = g(1) = 4$

5. $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{2}{x(x+2)}$

② $\frac{3}{x(x+2)}$

③ $\frac{2}{(x+2)(x+3)}$

④ $\frac{3}{(x+2)(x+3)}$

⑤ $\frac{3}{x(x+3)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}\end{aligned}$$

6. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{98}{99}$ ② $\frac{100}{99}$ ③ $\frac{99}{100}$ ④ $\frac{101}{100}$ ⑤ $\frac{100}{101}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

7. 분수함수 $y = \frac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ 이므로
주어진 분수함수의 점근선은 $x = 2$, $y = -3$ 이다.
 $\therefore 2 + (-3) = -1$

8. 함수 $y = \frac{ax+1}{x-1}$ 의 역함수가 그 자신이 되도록 a 의 값을 정하면?

- ① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{ax+1}{x-1} \text{ 에서 } y(x-1) = ax+1$$

$$yx - y = ax + 1, yx - ax = 1 + y$$

$$x(y-a) = 1+y, x = \frac{1+y}{y-a}$$

$$\therefore y^{-1} = \frac{x+1}{x-a}$$

역함수가 본래 함수와 같으므로

$$\frac{x+1}{x-a} = \frac{ax+1}{x-1}$$

$$\therefore a = 1$$

9. $y = \sqrt{4x-12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a , y 축으로 b 만큼 평행이동한 것이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한
그래프의 함수이다.
즉, $a = 3$, $b = 5$
 $\therefore a + b = 8$

10. $y = \sqrt{4x-12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3, \beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

11. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \geq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

② $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \geq 1\}$

③ $\{x \mid x \geq 1\}, \{y \mid y \leq 0\}$

④ $\{x \mid x \leq 1\}, \{y \mid y \geq 0\}$

⑤ $\{x \mid x \leq 0\}, \{y \mid y \leq 1\}$

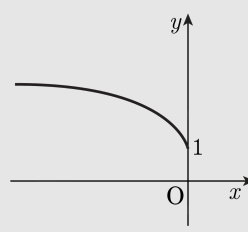
해설

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{-3x+1} + \sqrt{-12x} \\ &= \sqrt{-3x+1} + 2\sqrt{(-3x) \cdot 1} \\ &= \sqrt{-3x+1} \end{aligned}$$

따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역 : $\{x \mid x \leq 0\}$,

치역 : $\{y \mid y \geq 1\}$



12. 다음 ()안에 알맞은 것은?

$\frac{3}{2}i, \frac{5}{4}i, (\quad), \frac{9}{8}i, \frac{11}{10}i, \cdots$

- ① $\frac{5}{4}i$
- ② i
- ③ $\frac{7}{6}i$
- ④ $\frac{8}{6}i$
- ⑤ $\frac{6}{7}i$

해설

나열된 복소수의 분모의 수열을 a_n 이라 하면 $a_n = 2n$
분자의 수열을 b_n 이라 하면 $b_n = (2n + 1)i$ 이다.
따라서 구하는 세 번째의 복소수는 $\frac{7}{6}i$ 이다.

13. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10} 을 구하면?

① 150

② 170

③ 190

④ 210

⑤ 230

해설

$a = 3, d = 4, n = 10$ 이므로

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 에 대입하면

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$$

14. $x \geq 0$ 일 때, $\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}}$ 를 간단히 하면?

- ① $x\sqrt{x}$ ② $x\sqrt[4]{x}$ ③ $\sqrt[4]{x}$ ④ $\sqrt[8]{x^3}$ ⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} \\ &= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

15. 다음 식의 값 중 값이 다른 하나는?

① $9^{\log_9 4}$

② $\log_{\sqrt{5}} 25$

③ $\log_2 3 \log_3 5 \log_5 16$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81$

해설

① $9^{\log_9 4} = 4$

② $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 4$

③ $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \frac{\log 3 \cdot \log 5 \cdot \log 16}{\log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 5}$

$= \frac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

④ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{2^{-1}} 16 = \log_2 16 = 4$

⑤ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{3^{-1}} 3^4 = \frac{4}{-1} \log_3 3 = -4$

16. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

17. 일차함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f(1) = 5, f^{-1}(7) = 2$ 가 성립할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?(단, f^{-1} 은 f 의 역함수이고, a, b 는 상수)

① 3

② 2

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

$f(1) = 5$ 에서

$a + b = 5 \cdots \textcircled{1}$

$f^{-1}(7) = 2 \Leftrightarrow f(2) = 7$ 에서

$2a + b = 7 \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하면 $a = 2, b = 3$

$\therefore a - b = -1$

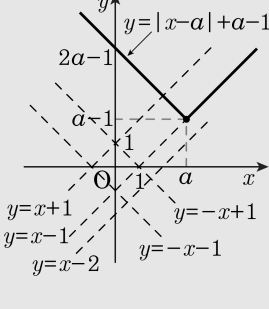
18. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x + 1$
- ② $y = x - 1$
- ③ $y = x - 2$
- ④ $y = -x - 1$
- ⑤ $y = -x + 1$

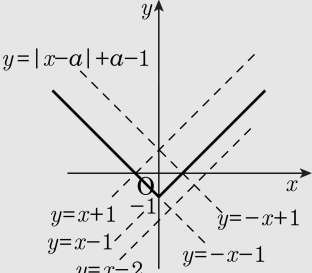
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

i) $a > 0$ 일 때,
 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음
그림과 같다.
따라서, $y = |x - a| + a - 1$ 은 $y =$
 $x + 1$,
 $y = x - 1$ 과 만나며 $a \leq 1$ 일 때
 $y = -x + 1$ 도 만난다.

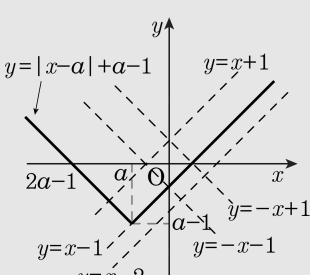


ii) $a = 0$ 일 때,
 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y = |x - a| + a - 1$ 과
만 나 지 않 는 그래프는 $y = x - 2$ 밖 에 없 다.



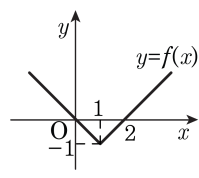
iii) $a < 0$ 일 때,
 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y = |x - a| + a - 1$ 과 만나지 않는

그래프는 $y = x - 2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y = |x - a| + a - 1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y = x - 2$ 이다.

19. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)$ 는?



- ① $f(x) = |x + 1| + 1$ ② $f(x) = |x + 1| - 1$
③ $f(x) = |x - 1| + 1$ ④ $f(x) = |x - 1| - 1$
⑤ $f(x) = -|x - 1| + 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = |x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = |x|$ 에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y + 1$ 을 대입하면

$$y + 1 = |x - 1|$$

$$y = |x - 1| - 1$$

$$\therefore f(x) = |x - 1| - 1$$

20. 분수식 $\frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{2} - 1$

③ $\sqrt{2} + 1$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 1

해설

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) - 1} = -1$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= \frac{1}{\sqrt{2} - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

21. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} : 3x = z$
 $\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$
여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$
따라서 $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$
 $\therefore m + n = 8$

22. $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $a^3 + b^3$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$a + b = \sqrt{6}, ab = 1$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

23. 등차수열 3, 7, 11, 15, ...에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, $\ominus + \ominus + \ominus$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} \ominus &= \frac{3 + \ominus}{2} \\ \ominus &= \frac{\ominus + 15}{2} \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3 + 11}{2}$, $11 = \frac{7 + 15}{2}$ 가 성립하므로

$\ominus$ 는 7, $\ominus$ 는 11, $\ominus$ 는 7이다.

$\therefore \ominus + \ominus + \ominus = 7 + 11 + 7 = 25$

24. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$ (k 는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$$

$$= \frac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \frac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$$

$$= \frac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면 $r = 2$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{2^{2k} - 1}{3} = 85, \quad 2^{2k} = 256 = 2^8$$

따라서 $2k = m = 8$

$$r + m = 10$$

25. $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) = 62$ 를 만족하는 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \{ \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) - (n^2 - 1) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \{ (k^2 + 1) - (k^2 - 1) \} + (n^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n 2 + (n^2 - 1) = n^2 + 2n - 1 = 62 \\ & \text{이것을 정리하여 인수분해하면 } (n + 9)(n - 7) = 0 \\ & \text{따라서 } n = -9 \text{ 또는 } n = 7 \\ & \text{그런데 } n > 0 \text{ 이므로 } n = 7 \end{aligned}$$

26. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

- ① 2200 ② 2640 ③ 2860 ④ 3020 ⑤ 3080

해설

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 &= \sum_{k=1}^{20} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} \\ &= 2870 + 210 = 3080 \end{aligned}$$

27. $\sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ 의 값은?

① $\log_2 3$

② $\log_2 15$

③ $\log_2 30$

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k+1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \{ \log_2 (k+1) - \log_2 k \} \\ &= (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) + \cdots \\ &\quad + (\log_2 16 - \log_2 15) \\ &= \log_2 16 - \log_2 1 = \log_2 2^4 = 4 \end{aligned}$$

28. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2+\cdots+n} &= \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} &= 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11}\end{aligned}$$

29. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

30. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

31. $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}, y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$ 일 때, $\log_6(x^2 + xy + y^2)$ 의 값은?

① $\log_6 25$

② 2

③ 3

④ $\log_2 12$

⑤ 6

해설

$x = \sqrt{11} + \sqrt{3}, y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$ 이므로

$(x + y)^2 = (2\sqrt{11})^2 = 44$

$xy = (\sqrt{11} + \sqrt{3})(\sqrt{11} - \sqrt{3})$

$= 11 - 3 = 8$

$\therefore x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 44 - 8 = 36$

$\therefore \log_6(x^2 + xy + y^2) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$

32. $10^a = 2$, $10^b = 3$ 일 때, $\log_{15} 10$ 을 a , b 로 나타내면?

① $\frac{1}{a+b+1}$

② $\frac{1}{a-b+1}$

③ $\frac{1}{a+b-1}$

④ $\frac{1}{b-a+1}$

⑤ $\frac{1}{b-a-1}$

해설

$10^a = 2$, $10^b = 3$ 에서 $a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$

$$\log_{15} 10 = \frac{1}{\log_{10} 15}$$

한편, $\log_{10} 15 = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}$

$$= \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2 = b - a + 1$$

$$\therefore \log_{15} 10 = \frac{1}{b-a+1}$$

33. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 275 &= \log_{10}^{25 \times 11} = 2 \log_{10}^5 + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - \log_{10}^2) + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - 0.301) + 1.041 \\ &= 2.439 \\ &\text{소수 셋째 자리에서 반올림하면 } 2.44\end{aligned}$$

34. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 10^{-12}W/m^2 와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\text{W/m}^2$ 를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10 \log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB 일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

- ① 10^9 배

② 10^{10} 배

③ 10^{11} 배

④ 10^{12} 배

⑤ 10^{13} 배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB 이므로 이 소리의 세기를 a 라 하면
 $130 = 120 + 10 \log a$
 $10 = 10 \log a$
 $1 = \log a$
 $\therefore a = 10$
따라서 표준음의 세기의 $\frac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$ (배)

35. 어떤 용기에 있는 물의 양은 전날 같은 시각의 물의 양의 9%만큼 줄어든다고 한다. 이와 같은 비율로 물의 양이 줄어들 때, 8일이 지난 후의 물의 양은 처음 양의 $\frac{1}{K}$ 배이다. 이때, $100K$ 의 값을 구하여라.
(단, $\log 0.213 = \bar{1}.328$, $\log 9.1 = 0.959$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 213

해설

용기의 현재 물의 양을 α 라 하면 8일 후의 물의 양은 $\alpha(0.91)^8$ 이다.

$$\alpha(0.91)^8 = \frac{1}{K}\alpha \text{에서 } \frac{1}{K} = (0.91)^8$$

이때, $\log 0.91 = -1 + 0.959 = -0.041$ 이므로

$$\log \frac{1}{K} = 8 \log 0.91 = -0.328$$

$$\therefore \log K = 0.328$$

조건에서 $\log 0.213 = \bar{1}.328$ 이므로

$$K = 2.13$$

$$\therefore 100K = 213$$

36. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

- ① $\frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}(x \neq -1)$
 ④ $\frac{x+2}{x+1}(x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x \neq 1)$

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x \text{ 에서}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = t \text{ 로 놓으면 } x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}, f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$y = \frac{2(x+1)}{x-1} \text{ 이면}$$

$$yx - y = 2x + 2 \text{ 에서 } x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2} (x \neq 2)$$

37. 지난 해 어느 대학의 입학시험 결과 수험생의 남녀의 비는 8 : 5, 합격자의 남녀의 비는 7 : 4, 불합격자의 남녀의 비는 3 : 2 이었다. 이 때, 전체 합격률은?

- ① $\frac{9}{26}$
- ② $\frac{4}{13}$
- ③ $\frac{9}{26}$
- ④ $\frac{5}{13}$
- ⑤ $\frac{11}{26}$

해설

	남	여	전체
합격자	7b	4b	11b
불합격자	3c	2c	5c
수험생	8a	5a	13a

$7b + 3c = 8a \cdots \textcircled{1}$

$4b + 2c = 5a \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \times 3$

$a = 2b$

$(\text{전체 합격률}) = \frac{11b}{13a} = \frac{11b}{26b} = \frac{11}{26}$

38. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

39. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$
(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 5$
(i), (ii) 에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$
 $\therefore a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n \quad (n \geq 2)$
 $\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$
 $= 5 + \frac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$
 $2n^2 + 2n + 1 = 221$ 에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$
그런데 $n \geq 1$ 이므로 $n = 10$

40. 다섯 개의 실수 a, b, c, d, e 를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e 가 다음 조건을 만족시킬 때, b 가 이 수열의 제 n 항이라 하면 n 의 값은?

- (가) $e = \sqrt{cd}$
(나) $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$
(다) $a < b$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

조건 (가)에서 $e = \sqrt{cd}$ 이므로 $e^2 = cd$, 즉, e 는 c, d 의 등비중항이므로 c, e, d 또는 d, e, c 의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (나)에서 $\frac{a}{e} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = ce$ 이므로 a, c, e, d 또는 d, e, c, a 의 순서대로 등비수열을 이룬다.
조건 (다)에서 $a < b$ 이므로 a, c, e, d, b 또는 d, e, c, a, b 이므로 b 는 항상 제 5항이다.

41. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \approx 1.791$)

- ① 791000 원 ② 792000 원 ③ 793000 원
④ 794000 원 ⑤ 795000 원

해설

$$S_n = \frac{60000 \{ (1.06)^{10} - 1 \}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06} \\ = 791000(\text{원})$$

42. 퇴직금으로 받은 2억 원을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액을 연금형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 20년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은?(단, $1.05^{20} = 2.6$, 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산한다.)
- ① 1625만원 ② 1734만원 ③ 2085만원
- ④ 2480만원 ⑤ 2600만원

해설

할부 계산과 마찬가지로 계산 시점은 20년 후 마지막 수령년도를 기준으로 계산한다.

매년 지급받을 연금을 a 만원이라 하면

$$20000 \times 1.05^{20} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$20000 \times 2.6 = \frac{a(2.6 - 1)}{0.05}$$

$$\therefore a = \frac{20000 \times 2.6 \times 0.05}{1.6} = 1625(\text{만원})$$

43. 3의 세제곱근 중 실수인 것을 a , 9의 세제곱근 중에 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $\sqrt[3]{9}$ ⑤ 9

해설

3의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$
이므로 $a = \sqrt[3]{3}$
9의 세제곱근 중에 실수인 것은 $\sqrt[3]{9}$
따라서, 구하는 값은
 $ab = \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

44. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[3]{5}$ 일 때, 세 수 a, b, c 의 대소 관계로 옳은 것은?

- ① $a < b < c$ ② $c < b < a$ ③ $b < c < a$
④ $a < c < b$ ⑤ $c < a < b$

해설

$a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
 $b = \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$
 $c = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ 이므로 세 수를 각각 6제곱한다.
 $a^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$
 $b^6 = (4^{\frac{1}{3}})^6 = 4^2 = 16$
 $c^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^2 = 25$
 $8 < 16 < 25$ 이므로 $a < b < c$

45. 서로 다른 세 실수 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c 는 1이 아닌 양수이다.)

보기

- ㉠ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 는 이 순서로 등비수열을 이룬다.
㉡ $\log a, \log b, \log c$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.
㉢ $\log_a 2, \log_b 2, \log_c 2$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$

㉠ (참) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2$

따라서, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

㉡ (참) $\log a + \log c = \log ac = \log b^2 = 2\log b$
따라서, $\log a, \log b, \log c$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

㉢ (거짓) [만례] $a = 2, b = 4, c = 8$ 이면
 $\log_2 2 = 1, \log_4 2 = \frac{1}{2}, \log_8 2 = \frac{1}{3}$ 이므로
 $b^2 = ac$ 이지만 $2\log_b 2 \neq \log_a 2 + \log_c 2$ 이다.

46. 정의역과 공역이 모두 자연수의 집합인 함수 $f(n)$ 이 있다. $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 이고, $f(7) = 21$ 일 때, $f(9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

$$f(1) = a, f(2) = b \text{ 라고 하면 } f(3) = a + b$$

$$f(4) = a + 2b$$

$$f(5) = 2a + 3b$$

$$f(6) = 3a + 5b$$

$$f(7) = 5a + 8b = 21 \text{ 을 만족하는 자연수는}$$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

$$f(8) = 8a + 13b$$

$$f(9) = 13a + 21b = 13 + 42 = 55$$

47. 다음 그림은 $f(x) = \frac{2}{x}$ 의 그래프 이다. $f(a) = 2^\alpha, f(b) = 2^\beta$ 이고 $ab = 8$ 일 때 $\alpha + \beta$ 의 값은?

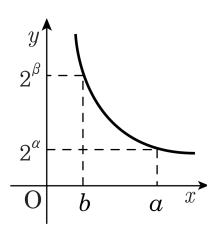
① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2



해설

$$\frac{2}{a} = 2^\alpha, \frac{2}{b} = 2^\beta$$

$$a = 2^{1-\alpha}, b = 2^{1-\beta}$$

$$a \cdot b = 2^{1-\alpha+1-\beta} = 2^{2-(\alpha+\beta)} = 8$$

$$2 - (\alpha + \beta) = 3$$

$$\therefore \alpha + \beta = -1$$

48. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ 이고, $a_{n+3} = a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 두 번째로 나오는 30은 제 몇 항인가?

① 제 84 항

② 제 85 항

③ 제 86 항

④ 제 87 항

⑤ 제 88 항

해설

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

$a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 4, \dots$

와 같이 진행되는 수열이다.

30이 두번째로 나오는 것은

$3 \cdot (30 - 1) + 1$ 번째 이므로

제 88 항

49. $A = \left\{ x \mid x = \left\{ \frac{2^{11}(3^4 + 3^2 + 1)}{3^6 - 1} \right\}^{\frac{1}{2n}}, n \text{과 } x \text{는 양의 정수} \right\}$ 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$$\begin{aligned} x &= \left\{ \frac{2^{11}(3^4 + 3^2 + 1)}{(3^2 - 1)(3^4 + 3^2 + 1)} \right\}^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left(\frac{2^{11}}{3^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{4}{n}} \end{aligned}$$

양의 정수 n 에 대하여 x 가 자연수가 되기 위한 n 은 1, 2, 4이다.
따라서, $A = \{2, 4, 16\}$
그러므로 집합 A 의 원소의 합은 22이다.

50. 자연수 A 의 최고 자리의 숫자는 4이다. $\log A$ 의 소수 부분을 α 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① $0 \leq \alpha < 0.3010$

② $0.3010 \leq \alpha < 0.4771$

③ $0.4771 \leq \alpha < 0.6020$

④ $0.6020 \leq \alpha < 0.6990$

⑤ $0.6990 \leq \alpha < 0.7781$

해설

A 의 최고 자리의 숫자가 4이므로

$4 \times 10^n \leq A < 5 \times 10^n$ (n 은 자연수)라 하면

$n + \log 4 \leq \log A < n + \log 5$

$\log 4 = 2\log 2 = 0.6020$, $\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$ 이므로

$n + 0.6020 \leq \log A < n + 0.6990$

$\therefore 0.6020 \leq \alpha < 0.6990$