1. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$의 모든 근의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3,\ \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

2. 연립방정식 $ax+by=8$, $2ax-by=-2$의 근이 $x=1$, $y=2$일 때, a, b의 값은?

① $a=-2$, $b=-3$
② $a=3$, $b=2$
③ $a=2$, $b=-3$
④ $a=2$, $b=3$
⑤ $a=-3$, $b=-2$

해설

$ax+by=8$, $2ax-by=-2$
근이 $x=1, y=2$이므로
$$\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$$
$\therefore\ a=2, b=3$

3. $1 \le x \le 8$, $2 \le y \le 5$일 때, $x-y$의 값의 범위는?

① $-9 \le x-y \le 10$

② $-4 \le x-y \le 6$

③ $-3 \le x-y \le 4$

④ $2 \le x-y \le 40$

⑤ $3 \le x-y \le 13$

해설

$1-5 \le x-y \le 8-2$

4. 두 점 $A(-3)$, $B(6)$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\overline{AB} = |6-(-3)| = 9$

5. 수직선 위의 두 점 A(-3), B(-7) 사이의 거리를 구하면?

① 8　② 6　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$\therefore\ |-7-(-3)|=4$

6. 두 점 A $(-5, 1)$, B $(3, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(0, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(0, 3)$
④ $(0, 4)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

y 축 위의 점을 Q $(0, a)$ 라 하면 $\overline{AQ} = \overline{QB}$
$\therefore (0+5)^2 + (a-1)^2 = (0-3)^2 + (a-5)^2$
정리하면 $a = 1$ $\quad \therefore$ Q $(0, 1)$

7. $A(1,\ -5)$, $B(6,\ 5)$ 를 잇는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 P의 좌표는?

① $(3,-1)$　② $(4,1)$　③ $\left(\frac{3}{2},0\right)$
④ $(2,2)$　⑤ $(9,25)$

해설

내분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P=\left(\frac{3\times6+2\times1}{3+2},\ \frac{3\times5+2\times(-5)}{3+2}\right)=(4,1)$$

8. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ a)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$, $\mathrm{C}(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$일 때, $a-b$는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

세 점 $\mathrm{A}(2,\ a)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$, $\mathrm{C}(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로,

$\dfrac{2+3+b}{3}=1$에서 $b=-2$

$\dfrac{a+4-2}{3}=2$에서 $a=4$

$\therefore\ a-b=6$

9. 기울기가 2 이고 점 $(-3,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=2x-3$ ② $y=2x+3$ ③ $y=2x-7$
④ $y=2x+7$ ⑤ $y=2x+9$

해설

$y-1=2\{x-(-3)\}$
$\therefore\ y=2x+7$

10. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$이 평행할 때의 a값이 $\frac{1}{n}$이다. n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 에서

$\frac{a-2}{a}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-1}{3}$ $(a\neq 0)$

$\therefore\ 3a=-a+2$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ n=2$

11. 두 점 A$(-5,\ -8)$, B$(3,\ -2)$ 를 잇는 선분의 수직 이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때 $a - b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

구하는 도형 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면,

$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+8)^2}$

$= \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 16y + 89$

$= x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 \Rightarrow 4x + 3y + 19 = 0$

(다른 풀이) $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $\mathrm{M}(-1,\ -5)$ 를 지나고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 에 수직인 직선이다.

$\therefore y + 5 = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3} - 5$

$\therefore y + 5 = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{3}$

$\therefore a - b = -\frac{4}{3} + \frac{19}{3} = \frac{15}{3} = 5$

12. 점 $(4,\ 3)$과 직선 $5x-12y+3=0$ 사이의 거리를 d_1, 점 $(4,\ 3)$과 직선 $12x+5y-50=0$ 사이의 거리를 d_2라고 할 때, d_1과 d_2 사이의 관계는?

① $d_1=d_2$　② $d_1=d_2+1$　③ $d_1+1=d_2$
④ $d_1=d_2+2$　⑤ $d_1+2=d_2$

해설

$$d_1=\frac{|5\cdot 4-12\cdot 3+3|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-13|}{\sqrt{169}}=1$$

$$d_2=\frac{|12\cdot 4+5\cdot 3-50|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|13|}{\sqrt{169}}=1$$

따라서 $d_1=d_2$

13. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
$x^2 = t$ 로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

14. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}\,,\ 2$ ② $-1 + \sqrt{2}\,,\ -3$ ③ $1 - \sqrt{2}\,,\ 3$

④ $1 - \sqrt{2}\,,\ -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}\,,\ 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설
주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$,즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots$㉣
㉣ − ㉡을 하면 $x=1$
㉣ − ㉢을 하면 $y=2$
㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \ \cdots ㉠ \\ x - y = 1 \ \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

18. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x-1>m(x-1)$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$m^2x-1>m(x-1)$ 에서

$m^{2x}-1>mx-m$

$\therefore (m^2-m)x>1-m\cdots$㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2-m=0,\ 1-m\ge 0$

$m^2-m=0$에서 $m(m-1)-0$

$\therefore m=0$ 또는 $1\cdots$㉡

$1-m\ge 0$에서 $m\le 1\cdots$㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m=0$ 또는 $m=1$

19. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+2ax-4 \geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$　② $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 3$

③ $-4 < a$　④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a \leq 0$이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4) < 0$이므로 $-4 < a < 0$이고
$a = 0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

20. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$ ㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0,\ 2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

21. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$
② $-7<x<-5$
③ $-7<x<5$
④ $5<x<7$
⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로

$(14x-1)(10x-1)<0,\ 140x^2-24x+1<0$

$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$

$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ ㈎

㈎를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면

$-4x^2-48x-140<0$

$x^2+12x+35>0,\ (x+7)(x+5)>0$

$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

22. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$ ② $-1 < a < 3$ ③ $0 \le a \le 3$

④ $-1 < a < 4$ ⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a = 0$일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$에서 $D \le 0$이므로

$a^2 - 3a \le 0$

$\therefore 0 < a \le 3 (\because a \neq 0)$

23. $\begin{cases} x^2-3x \le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2-3x \le 0$에서

$x(x-3) \le 0$이므로

$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎

$x^2-5x+4<0$에서

$(x-1)(x-4)<0$이므로

$1<x<4 \cdots$ ㈏

㈎, ㈏에 의해

$1<x \le 3$이므로

$\alpha=1, \beta=3$

$\therefore \alpha+\beta=4$

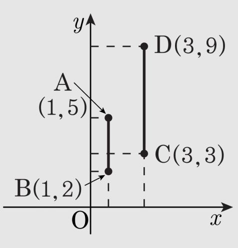
24. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ 를 동시에 지나야 하고

a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기이고

a의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기이다.

$\overline{\mathrm{BD}}$의 기울기$= \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$

$\overline{\mathrm{AC}}$의 기울기$= \frac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore\ -1 \le a \le \frac{7}{2}$

25. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점을 지나고, 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-3y+4=0$　　② $2x+3y+4=0$

③ $2x-3y-4=0$　　④ $x-3y+4=0$

⑤ $-x-3y+4=0$

해설

두 직선 $x-y+1=0\cdots$①

$x-2y+3=0\cdots$②의 교점을 지나는 직선을 l 이라고 하면,

직선 l 은 $l:(x-y+1)\cdot m+(x-2y+3)=0\cdots$③의 꼴로 나타낼 수 있다.

한편, 직선 ①의 x 절편은 -1,

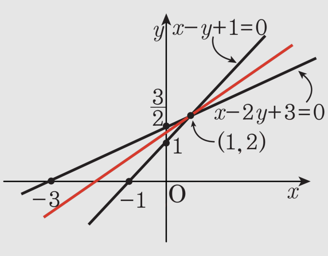
직선 ②의 x 절편은 -3 이므로

l 이 삼각형의 넓이를 이등분하려면, 점 $(-2,0)$ 을 지나야 한다.

점 $(-2,0)$ 을 ③에 대입하면 $-m+1=0$

$\therefore m=1$

따라서, l 의 방정식은 $2x-3y+4=0$



26. 복소수 $z = a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi)\\ &= (2a+3b)+(2b-3a)i \cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠이 실수이려면 $2b = 3a$

$\therefore\ b = \dfrac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

27. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0$,

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

28. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$ 이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

29. 다음 연립 방정식의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+8z=4 \end{cases}$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 해가없다

해설

$$\begin{cases} x+y+z=1\cdots ① \\ x+2y+3z=2\cdots ② \\ 2x+5y+8z=4\cdots ③ \end{cases}$$

② − ① 하면
$y+2z=1$
③ − ② × 2 하면
$y+2z=0$
∴ 근이 없다.

30. $x,\ y,\ z$에 대한 연립방정식

$\begin{cases} a^2x+2a(y-1)=4 \\ a^2y+2a(z-1)=4 \\ a^2z+2a(x-1)=4 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$a^2x+2a(y-1)=4$에서 $a^2x+2ay=2a+4\cdots$㉠
$a^2y+2a(z-1)=4$에서 $a^2y+2az=2a+4\cdots$㉡
$a^2z+2a(x-1)=4$에서 $a^2z+2ax=2a+4\cdots$㉢
㉠+㉡+㉢에서
$a^2(x+y+z)+2a(x+y+z)=3(2a+4)$
$(a^2+2a)(x+y+z)=3(2a+4)$
$a(a+2)(x+y+z)=6(a+2)$
ⅰ) $a=0$일 때, 주어진 방정식은 모두 $0=4$가 되어 모순이므로 연립방정식의 해는 없다.
ⅱ) $a=-2$일 때, 주어진 연립방정식은 $x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0$
따라서, $x=y=z$를 만족하는 모든 값이 해가 되므로 연립방정식의 해는 무수히 많다.
ⅲ) $a\neq 0,\ a\neq 2$일 때, 주어진 연립방정식은 한 쌍의 해를 갖는다. ⅰ), ⅱ), ⅲ)으로부터 구하는 a값은 -2

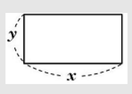
31. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ⋯⋯㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ⋯⋯㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

32. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=0$
$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=-1+2=1$

33. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 $x,\ y$를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 $x,\ y$가 양의 정수이므로
$2x-1,\ y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

34. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 vkm로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}} = \frac{s}{\frac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u+v} = x$$

승용차 B의 평균 속력은 $\frac{1}{2}(u+v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{2uv}{u+v}$$

$$= \frac{(u+v)^2 - 4uv}{2(u+v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

35. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, \ \ a \geq 6, \ \ a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

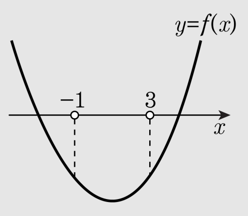
36. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

37. 세 점 $\mathrm{A}(-1, -4)$, $\mathrm{B}(3, -3)$, $\mathrm{C}(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은?

① 46　　② 45　　③ 44　　④ 43　　⑤ 42

해설

점 P 를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2 \\
&= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\} \\
&+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\} \\
&+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\} \\
&= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9 \\
&+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 \\
&= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85 \\
&= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46 \\
&= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46
\end{aligned}$$

따라서 $x = 3$, $y = -2$ 일 때,

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

38. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

39. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ±2 ② ±4 ③ ±8 ④ ±16 ⑤ ±32

해설

$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots ㉡ \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2$ $\quad\therefore\ xyz=\pm16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm1,\ y=\beta=\pm2,\ z=\gamma=\pm8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm16$

40. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.