1. 다항식 $5xy - yx^2 + 2x^3 + 2yz^2$ 에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① x의 계수는 $5y$이다.

② x^2의 계수는 $-y$이다.

③ x에 대한 3차식이다.

④ x에 대한 상수항은 $2yz^2$이다.

⑤ y, z에 대한 2차식이다.

해설

y, z에 대한 3차식이다.

2. 두 다항식 $A = 2x^3 + 4x^2 - 7$, $B = x^2 + x - 2$에 대하여 $A - 2B$를 간단히 한 것은?

① $2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$
② $2x^3 + 2x^2 + 2x - 3$
③ $2x^3 + 2x^2 + 2x + 3$
④ $2x^3 + 6x^2 - 2x + 3$
⑤ $2x^3 + 6x^2 - 2x - 3$

해설

$A - 2B$ 를 동류항끼리 묶어 정리한다.

$$\begin{aligned} A - 2B &= (2x^3 + 4x^2 - 7) - 2(x^2 + x - 2) \\ &= 2x^3 + 4x^2 - 7 - 2x^2 - 2x + 4 \\ &= 2x^3 + (4 - 2)x^2 - 2x - 7 + 4 \\ &= 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

3. 모든 실수 x에 대하여 등식 $3x^2+2x+7=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 성립할 때, 상수 c의 값은?

① -6 ② -7 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

항등식이므로 우변을 전개하여 동류항끼리 비교한다.

$3x^2+2x+7=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

$a=3,\ 2a+b=2,\ a+b+c=7$

$\therefore$ 연립하면 $a=3,\ b=-4,\ c=8$

해설

조립제법 사용

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 3 & 2 & 7 \\ & & -3 & 1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 8 \\ & & -3 & \\ \hline & 3 & -4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow c \\ \\ \Rightarrow b \end{array}$$

$\Downarrow$

a

4. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x 에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 에 대하여 $a + 2b + 3c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$-2 = 2a \quad \therefore \ a = -1$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$-3 = -b \quad \therefore \ b = 3$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$0 = 2c \quad \therefore \ c = 0$

$\therefore \ a + 2b + 3c = 5$

5. 임의의 실수 x, y에 대하여, $(x+y)a^2+(x-y)b=4x+y$가 성립할 때, a^2+b^2의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$(a^2+b)x+(a^2-b)y=4x+y$

$a^2+b=4\cdots①$, $a^2-b=1\cdots②$

①, ②에서 $a^2=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\frac{19}{4}$

6. 다항식 $x^3 - 2$를 $x^2 - 2$로 나눈 나머지는?

① 2　② -2　③ $-2x - 2$

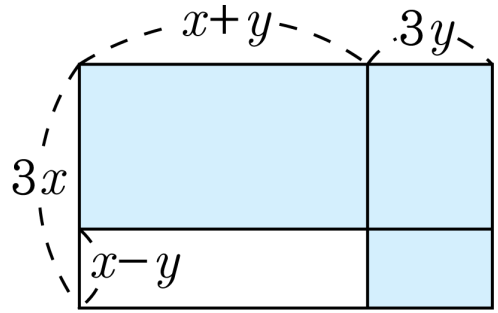
④ $2x + 2$　⑤ $2x - 2$

해설

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x - 2}{x^2 - 2} = x + \frac{2x - 2}{x^2 - 2}$$

$\therefore$ 몫은 x, 나머지는 $2x - 2$

7. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

8. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 13 개 ⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$

$= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4$

$= (4a^2-9b^2)^{12}$

$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

9. $(2x^3 - 3x^2 + 3x + 4)(3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 7x + 8)$을 전개한 식에서 x^3의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3 \times 8 - 3x^2 \times (-7x) + 3x \times (-2x^2) + 4 \times 2x^3 = 39x^3$

10. $a,\ b$는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore\quad a=1, b=-2$

11. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-4$라 하면

$f(2)=4a+2b+4=0 \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=a-b-5=6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=-8$

$\therefore\ a-b=11$

12. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가
$(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면
$P(-1) = P(3) = 0$
$P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \ \therefore \ a - b = -7$
$P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \ \therefore \ 3a + b = -81$
$\therefore \ a = -22, \ b = -15$

13. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

14. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$을 일차식 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 a의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

$f(1) = 1 + a + 3 = 0$, $a = -4$

15. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

16. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

17. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2 개씩 나온다.

$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

18. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times 2\times 10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times 10^{10}+12\times 10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times 6+10^5\times 12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

19. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

20. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$에서

$(2-4k)x + 3a - k = 0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k = 0,\ 3a-k = 0$

$k = \frac{1}{2}$ 이므로 $3a = k$에서 $a = \frac{1}{6}$

$\therefore\ 12a = 2$

21. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times$ 몫-3
$x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.
$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

22. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②

①+②에 의해

$2^{10}+2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$\therefore (a_0+a_2+\cdots+a_{10})=2^9+1=513$

23. 정식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3으로 나눌 때 $3x$가 남는다. $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x-1$ ② $6x-2$ ③ $6x-3$

④ $6x-5$ ⑤ $6x-9$

해설

$$f(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)+3$$
$$=(x-1)(x-2)Q_1(x)+3\cdots\cdots㉠$$
$$f(x)=(x^2-4x+3)Q_2(x)+3x$$
$$=(x-1)(x-3)Q_2(x)+3x\cdots\cdots㉡$$
$$f(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b\cdots\cdots㉢$$

㉠, ㉢에서 $f(2)=3=2a+b\quad\cdots\cdots㉣$

㉡, ㉣에서 $f(3)=9=3a+b\quad\cdots\cdots㉤$

∴㉣, ㉤에서 $a=6,\ b=-9$

∴ 나머지는 $6x-9$

24. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면

$x=-1$을 대입하면 $R=31$

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+31$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입

$31=2Q(1)+31$

$\therefore\ Q(1)=0$

25. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$

④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면

$$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$$

$$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$$

$$=a(\sqrt{2}+1)+b\ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0)$$

$$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a=1,\ b=1$$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$