1. $(2ax^2)^3 \times (-3a^2x)^2$ 을 간단히 하면?

① $72a^7x^8$　　② $-72a^7x^8$　　③ $72a^{12}x^{12}$
④ $-72a^{12}x^{12}$　　⑤ $48a^8x^7$

해설
$(2ax^2)^3 \times (-3a^2x)^2 = 8a^3x^6 \times 9a^4x^2 = 72a^7x^8$

2. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$　② $4x^2 - 7x + 3$　③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$　⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설
직접 나누어서 구한다.
몫: $4x^2 - x - 2$, 나머지: $-5x + 3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

3. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1
② -1
③ $\sqrt{-1}$
④ $-\sqrt{-1}$
⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

4. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z+\bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z-\bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로
㉠ $z \cdot \bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ (실수)
㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)
㉢ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$
$b=0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.
㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)=(a+bi+1)(a-bi+1)$
$=(a+1+bi)(a+1-bi)$
$=(a+1)^2+b^2$ (실수)

5. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$

$= -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i$

$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.

$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

6. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

7. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로
$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$
따라서 $a = 0$또는 $a = -4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

8. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

9. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$일 때 $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

10. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　② 0　③ 2
④ 4　⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

11. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144　② 196　③ 288　④ 308　⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z라 하면

$x+y+z=22 \cdots\cdots$ ①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14 \cdots\cdots$ ② 이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$ 이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

12. x에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1}-\frac{x^2-x-3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$에서 $A-B$의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.
양변에 $x=2,\ x=-2$를 대입해서 정리하면
$x=2$일 때
$\frac{4-6-1}{1}-\frac{4-2-3}{3}+\frac{2}{2}=\frac{2A+B}{2\times1\times3}$
$-3+\frac{1}{3}+1=\frac{2A+B}{6}$
$\therefore\ 2A+B=-10\cdots$㉠
$x=-2$일 때
$\frac{4+6-1}{-3}-\frac{4+2-3}{-1}+\frac{2}{-2}=\frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$
$-3+3-1=\frac{-2A+B}{-6}$
$\therefore\ -2A+B=6\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4,\ B=-2$
$\therefore\ A-B=(-4)-(-2)=-2$

13. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

14. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$

위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

15. 다항식 $f(x)=x^3-3x^2+kx-6$이 일차식 $x-2$로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=(x-2)\,Q(x)$

즉, $f(2)=8-12+2k-6=0$

$\therefore\ k=5$

$f(x)=x^3-3x^2+5x-6$

$\therefore\ f(1)=-3$

16. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $2x+1$　② $x+1$　③ $x-1$
④ $2x-1$　⑤ $3x+2$

해설

$f(x) = (x+1)Q_1(x) - 2$
$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 1$
$f(x) = (x+1)(x-2)Q_3(x) + ax + b$
$f(-1) = -a + b = -2,\ f(2) = 2a + b = 1$
$\therefore\ a = 1,\ b = -1$
구하는 나머지는 $x-1$

17. $(x^2-x)(x^2-x+1)-6$을 인수분해 하면?

① $(x^2-x+2)(x-3)(x+1)$
② $(x^2-x+3)(x-2)(x+1)$
③ $(x^2+x+1)(x-2)(x+3)$
④ $(x^2-x+2)(x+3)(x-1)$
⑤ $(x^2-x+1)(x+2)(x-3)$

해설

$A=x^2-x$로 치환하면
(준식) $=A(A+1)-6$
$=A^2+A-6$
$=(A+3)(A-2)$
즉, $(x^2-x+3)(x^2-x-2)$
$=(x^2-x+3)(x-2)(x+1)$

18. $a^2-b^2-c^2+2bc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b+c$ ② $a+b-c$ ③ $-a+b-c$

④ $-a+b+c$ ⑤ $-a-b+c$

해설

$$\begin{aligned} a^2-b^2-c^2+2bc &= a^2-(b^2+c^2-2bc) \\ &= a^2-(b-c)^2 \\ &= (a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

인수 : $(a+b-c)$, $(a-b+c)$(단, 복부호 동순)

19. 서로 다른 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$를 만족할 때, $x+y+z$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$
$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$
그런데 x, y, z가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$이므로
$x+y+z=0$

20. $\dfrac{1999^3+1}{1999\cdot 1998+1}$ 의 값은?

① 1997 ② 1998 ③ 1999 ④ 2000 ⑤ 2001

해설

$1999=x$ 라 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1}{x(x-1)+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1=1999+1=2000$$

21. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2　　② $1+\sqrt{2}$　　③ $1+\sqrt{3}$
④ $\sqrt{5}-1$　　⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

22. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

23. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a+2)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수의 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 4 ③ 2 ④ -1 ⑤ -3

해설

중근 : $\dfrac{D}{4}=0$

m값에 관계없이 성립 : m에 대한 항등식

$\dfrac{D}{4}=(a+m+2)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m\cdot(2a+4)+(4+4a+2b)=0$

$2a+4=0,\quad a=-2$

$4+4a+2b=0,\quad b=2$

$\therefore\ a+b=0$

24. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$에서 $a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right\} = 0$

$\therefore\ a = b = c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

25. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3,\ f(\beta)=3,\ f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$　　② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$　　④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2,\ b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1,\ b=-2,\ a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$