1. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

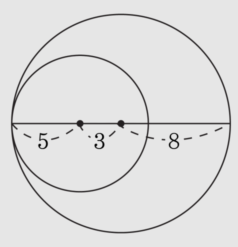
$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.
② 두 원이 외접한다.
③ 두 원이 두 점에서 만난다.
④ 두 원이 내접한다.
⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



3. 부등식 $y \le -x^2 + 4$를 만족시키는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y = -x^2 + 4$의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $P(x, y)$ 중 x, y가 모두 양의 정수인 것은

(i) $x = 1$일 때

$y \le -1^2 + 4 = 3$이므로 $y = 1, 2, 3$

(ii) $x = 2$일 때

$y \le -2^2 + 4 = 0$

즉, 양의 정수 y는 존재하지 않는다.

따라서 x, y가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$의 3개이다.

4. 이차항의 계수가 1 인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x+2$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4 이다. $A+B=ax^2+bx+c$ 를 만족하는 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$

두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$

$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$

$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$

$\therefore a=2, b=3, c=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

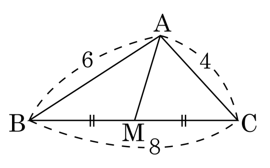
5. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2-2bx+a>0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7<x<-5$ ② $-5<x<-3$ ③ $-3<x<-1$
④ $5<x<7$ ⑤ $7<x<9$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가
$\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이므로 $a<0$
$\left(x-\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)<0$에서
$(14x-1)(10x-1)<0$
$\therefore\ -140x^2+24x-1>0$
$a=-140k,\ b=24k,\ c=-k$라 놓고
(단, $k>0 \leftarrow a<0$)
$4cx^2-2bx+a>0$에 대입하면
$-4kx^2-2\cdot 24kx-140k>0$
$x^2+12x+35<0$
$\therefore\ (x+7)(x+5)<0 \quad \therefore -7<x<-5$

6. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답：

▷ 정답： 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore \overline{AM}^2=10$

7. 점 $(1,\ 2)$를 지나고 x축 및 y축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$이 원이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2,\ r^2 - 6r + 5 = 0,\ (r-1)(r-5) = 0$
$\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$
따라서, 두 원의 중심은 각각 $(1, 1)$, $(5, 5)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$

8. 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(0,\ 2)$ 에 이르는 거리의 비가 $1:2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ 2π　④ 4π　⑤ 6π

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$

$\Rightarrow\ \overline{BP} = 2\overline{AP}$

$\Rightarrow\ \overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$

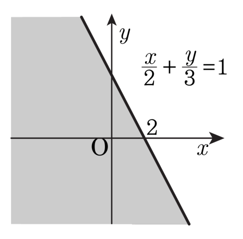
$\Rightarrow\ x^2 + (y-2)^2 = 4\left\{x^2 + (y+1)^2\right\}$

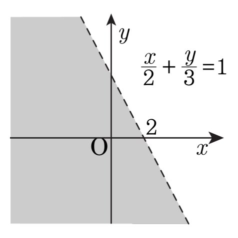
$\Rightarrow\ x^2 + y^2 + 4y = 0$

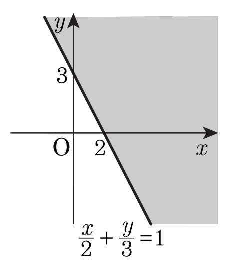
$\Rightarrow\ x^2 + (y+2)^2 = 4$

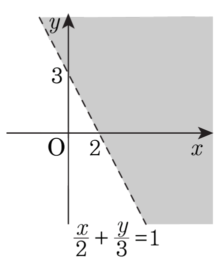
반지름이 2 인 원이므로 도형의 길이는 4π

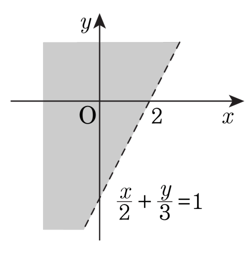
9. 부등식 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}>1$ 의 영역을 그림으로 나타낸 것을 구하면? (단, 실선은 경계선을 포함하며, 점선은 경계선을 제외한다.)

①


②


③


④


⑤


해설

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (경계선) 의 윗부분이고 등호가 없으므로 점선으로 표시하지 않은 4 번

10. 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 - 4x + 2$ 와 $B = x^3 + bx^2 - 2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 7

해설

$A = Gf(x), B = Gg(x)$ 라 하면
$A + B = G(f(x) + g(x), A - B = G(f(x) - g(x))$ 이므로
공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A + B = 2x^3 + (a+b)x^2 - 4x \\ \qquad\quad = x\{2x^2 + (a+b)x - 4\} \\ A - B = (a-b)x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$A + B$ 에서 x 는 $A - B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.
그러므로 $G = 2x^2 + (a+b)x - 4$
$\therefore\ A - B = -G = -2x^2 - (a+b)x + 4$
계수비교하면 $a - b = -2,\ a + b = 4$

11. α, β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$$

① $\alpha,\ \beta$　② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$　③ $p,\ q$
④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$　⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면
$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$
이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k \cdots$ ㉮
방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$
$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉮ 대입)
$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$
따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

12. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$　② 2　③ $\frac{1}{3}$　④ 3　⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,
$\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$
즉, $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$이다.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}&=\frac{\alpha+\beta-2}{2}\\&=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2},\ \frac{\beta-1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

13. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$의 한 근 ω

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$

$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$

$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2} = 0$

자연수 n의 최솟값은 2

14. 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)=2$가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\dfrac{a+b+c}{3}$　② $\dfrac{a+b+c-1}{3}$　③ $\dfrac{a+b+c-2}{3}$
④ $\dfrac{a+b+c-3}{3}$　⑤ $\dfrac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a<b<c$ 라 가정했을때, 정수근을 α라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)=2$를 만족하는 순서쌍은 $(1,-1,-2)$ 밖에 없다.

$\Rightarrow \alpha-a=1$

$\alpha-b=-1$

$\alpha-c=-2$

세 식을 다 더하면,

$3\alpha=a+b+c-2$, $\alpha=\dfrac{a+b+c-2}{3}$

15. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$　　ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

16. 다음 중에서 $2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$의 인수인 것은?

① $2x+1$　　② $x+2$　　③ $x+2a$

④ $x+a$　　⑤ $2x-1$

해설

$2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$
$=2x^3-4ax^2-3x^2+6ax-2x+4a$
$=(2x^3-3x^2-2x)-2a(2x^2-3x-2)$
$=x(2x^2-3x-2)-2a(2x^2-3x-2)$
$=(2x^3-3x-2)(x-2a)$
$=(x-2a)(2x+1)(x-2)$

17. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}=i,\ \dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$\therefore$ (준식) $=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{50}$

$=(-i)^{50}+(i)^{50}$

$=(-i)^{2}+(i)^{2}$

$=-2$

18. $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5 + y^5 = -1$	㉡ $x^9 + y^9 = -1$
㉢ $x^{11} + y^{11} = -1$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$

$x^2 = -x - 1 \cdots$ ①

①의 양변에 x 를 곱하면

$x^3 = -x^2 - x = -(x^2 + x) = 1$ ($\because$ $x^2 + x = -1$)

$x^3 = 1$, y 에 대해서도 마찬가지로 하면 $y^3 = 1$

또한 $x + y = -1, xy = 1$

㉠ $x^5 + y^5 = x^3 \cdot x^2 + y^3 \cdot y^2$
$= x^2 + y^2$
$= (x+y)^2 - 2xy$
$= -1$

㉡ $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3$
$= 1 + 1$
$= 2$

㉢ $x^{11} + y^{11} = (x^3)^3 \times x^2 + (y^3)^3 \times y^2$
$= x^2 + y^2$
$= -1$

※다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$ 에서

각각 양변에 $x - 1, y - 1$ 을 곱하면

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0, (y-1)(y^2 + y + 1) = 0$

$x^3 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0$

$\therefore$ $x^3 = y^3 = 1$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x + y = -1,$ $xy = 1$ 이므로

$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \therefore$ $x^3 = 1,$ $y^3 = 1$

19. 좌표평면 위의 원점을 O 라 하고 원 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=d$ 라 할 때, d가 정수가 되도록 하는 점 P 의 개수를 구하면?

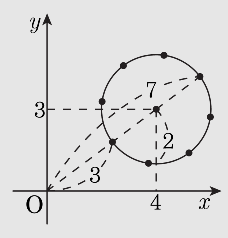
▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

원 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$을
표준형으로 고치면 $(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$
중심이 $(4,\ 3)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원이다.

그림으로 나타내면 다음과 같다.



원 밖의 점 $(0,\ 0)$ 에서 원의 중심 $(4,\ 3)$ 까지의
거리가 $\sqrt{4^2+3^2}=5$ 이므로 점 P 가
원 위를 움직일 때, d 의 값은 직선 OP 가
원의 중심을 지날 때, 최솟값 $d=5-2=3$ 과
최대값 $d=5+2=7$ 을 가진다.
따라서 $3\le d\le 7$ 가 되고,
$d=3,\ d=4,\ d=5,\ d=6,\ d=7$ 일 때
정수가 되는 데 $d=4,\ d=5,\ d=6$ 이 되는
점 P 는 두 개씩이 있으므로
$1+2+2+2+1=8$ 모두 8 개이다.

20. $f(x) = 2ax + b$ 가 $0 \leq f(1) \leq 2,\ 1 \leq f(2) \leq 3$ 을 만족시킬 때, $f(3)$ 이 취하는 값의 범위의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

▶ 답 :

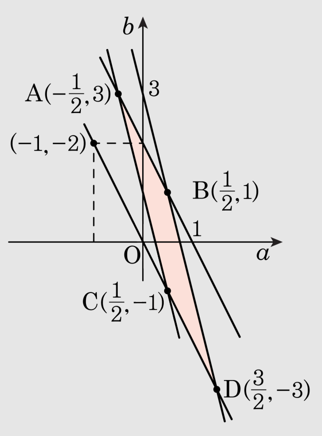
▷ 정답 : 6

해설

$0 \leq f(1) \leq 2,\quad 1 \leq f(2) \leq 3$

$0 \leq 2a + b \leq 2,\ 1 \leq 4a + b \leq 3$

두 영역을 그래프에 표시하면, 다음 그림과 같다.



$f(3) = 6a + b = k$ 라 놓으면,

$b = -6a + k$,

기울기는 -6 이고, y 절편이 k 인 직선이다.

k 가 최대일 때는 가장 오른쪽에 있는 점을 지날 때,

최소일 때는 가장 왼쪽에 있는 점을 지날 때이다.

최댓값은 $D\left(\frac{3}{2},\ -3\right)$ 를 지날 때,

$6 \times \frac{3}{2} - 3 = 6$,

최솟값은 $A\left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$ 지날 때,

$6 \times -\frac{1}{2} + 3 = 0$

$\therefore\ 6 + 0 = 6$