

1. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최대값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x - y - 3 + k(x + y) = 0$ 에서

$$(k + 1)x + (k - 1)y - 3 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2(k^2 + 1)}} \end{aligned}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때
최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$$k = 0 \text{ 일 때 } \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

2. 반지름의 길이가 5cm, 8cm 인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

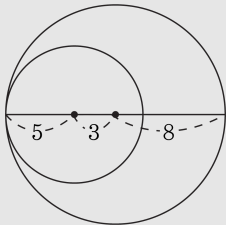
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5인 원이 반지름이 8인 원 안에
내접한다.



3. 부등식 $y \leq -x^2 + 4$ 를 만족시키는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y = -x^2 + 4$ 의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $P(x, y)$ 중 x, y 가 모두 양의 정수인 것은

(i) $x = 1$ 일 때

$$y \leq -1^2 + 4 = 3 \text{ 이므로 } y = 1, 2, 3$$

(ii) $x = 2$ 일 때

$$y \leq -2^2 + 4 = 0$$

즉, 양의 정수 y 는 존재하지 않는다.

따라서 x, y 가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 의 3개이다.

4. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B 의 최대공약수가 $x + 2$ 이고 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 이다. $A + B = ax^2 + bx + c$ 를 만족하는 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 2)(x + 1)(x - 2)$$

두 다항식은 각각 $(x + 2)(x + 1), (x + 2)(x - 2)$

$$A + B = (x + 2)(x - 2) + (x + 2)(x + 1)$$

$$= 2x^2 + 3x - 2 = ax^2 + bx + c$$

$$\therefore a = 2, b = 3, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

5. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$ 일 때, 부등식 $4cx^2 - 2bx + a > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

① $-7 < x < -5$

② $-5 < x < -3$

③ $-3 < x < -1$

④ $5 < x < 7$

⑤ $7 < x < 9$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가

$$\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10} \text{ 이므로 } a < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{14}\right) \left(x - \frac{1}{10}\right) < 0 \text{ 에서}$$

$$(14x - 1)(10x - 1) < 0$$

$$\therefore -140x^2 + 24x - 1 > 0$$

$$a = -140k, b = 24k, c = -k \text{ 라 놓고}$$

$$(\text{단, } k > 0 \leftarrow a < 0)$$

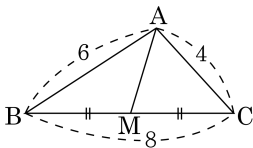
$$4cx^2 - 2bx + a > 0 \text{ 에 대입하면}$$

$$-4kx^2 - 2 \cdot 24kx - 140k > 0$$

$$x^2 + 12x + 35 < 0$$

$$\therefore (x + 7)(x + 5) < 0 \quad \therefore -7 < x < -5$$

6. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

7. 점 (1, 2)를 지나고 x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$, $r^2 - 6r + 5 = 0$, $(r-1)(r-5) = 0$

$\therefore r = 1$ 또는 $r = 5$

따라서, 두 원의 중심은 각각 (1, 1), (5, 5) 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

8. 두 점 $A(0, -1)$, $B(0, 2)$ 에 이르는 거리의 비가 $1 : 2$ 인 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$

② π

③ 2π

④ 4π

⑤ 6π

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$$

$$\Rightarrow \overline{BP} = 2\overline{AP}$$

$$\Rightarrow \overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4\{x^2 + (y + 1)^2\}$$

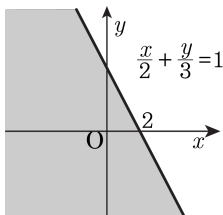
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 4$$

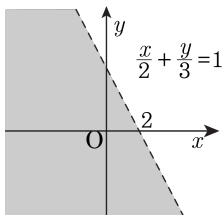
반지름이 2인 원이므로 도형의 길이는 4π

9. 부등식 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} > 1$ 의 영역을 그림으로 나타낸 것을 구하면? (단, 실선은 경계선을 포함하며, 점선은 경계선을 제외한다.)

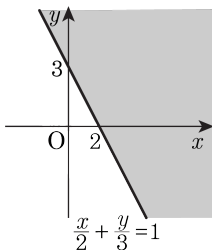
①



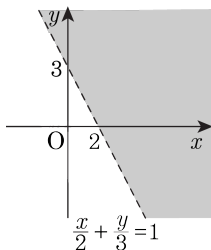
②



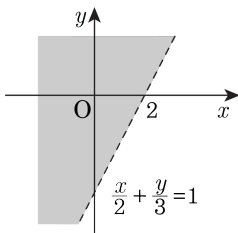
③



④



⑤



해설

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ (경계선)의 위부분이고 등호가 없으므로 점선으로 표시하지 않은 4번

10. 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 - 4x + 2$ 와 $B = x^3 + bx^2 - 2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① -3

② -1

③ 2

④ 4

⑤ 7

해설

$A = Gf(x), B = Gg(x)$ 라 하면

$A + B = G(f(x) + g(x)), A - B = G(f(x) - g(x))$ 이므로
공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A + B = 2x^3 + (a + b)x^2 - 4x \\ \quad = x\{2x^2 + (a + b)x - 4\} \\ A - B = (a - b)x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$A + B$ 에서 x 는 $A - B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.

그러므로 $G = 2x^2 + (a + b)x - 4$

$\therefore A - B = -G = -2x^2 - (a + b)x + 4$

계수비교하면 $a - b = -2, a + b = 4$

11. α, β 가 x 에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q) - k = 0$ 의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x - \alpha)(x - \beta) + k = 0$$

① α, β

② $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

③ p, q

④ $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$

⑤ $-p, -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q) - k = 0$ 을 정리하면

$$x^2 + (p+q)x + (pq-k) = 0$$

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = -(p+q), \alpha\beta = pq - k \cdots \textcircled{㉑}$$

방정식 $(x-\alpha)(x-\beta) + k = 0$ 을 정리하면

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta + k = 0$$

$$\therefore x^2 + (p+q)x + pq = 0 \quad (\because \textcircled{㉑} \text{ 대입})$$

$$\therefore (x+p)(x+q) = 0$$

따라서 구하는 두 근은 $x = -p, -q$

12. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② 2

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha + \beta = 3$$

한편, $f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $2x + 1 = \alpha, 2x + 1 = \beta$

즉, $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} &= \frac{\alpha + \beta - 2}{2} \\ &= \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 3$

$f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하면

$$f(2x + 1) = k(2x + 1 - \alpha)(2x + 1 - \beta)$$

$f(2x + 1) = 0$ 의 두 근은 $x = \frac{\alpha - 1}{2}, \frac{\beta - 1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\alpha + \beta - 2}{2} = \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

13. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

① 2

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x^2+x+1=0 \text{의 한 근 } \omega$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n 의 최솟값은 2

14. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c) = 2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\frac{a+b+c}{3}$

② $\frac{a+b+c-1}{3}$

③ $\frac{a+b+c-2}{3}$

④ $\frac{a+b+c-3}{3}$

⑤ $\frac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α 라고 하면, $(\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c) = 2$ 를 만족하는 순서쌍은 $(1, -1, -2)$ 밖에 없다.

$$\Rightarrow \alpha - a = 1$$

$$\alpha - b = -1$$

$$\alpha - c = -2$$

세 식을 다 더하면,

$$3\alpha = a + b + c - 2, \alpha = \frac{a + b + c - 2}{3}$$

15. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식

$$\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases} \quad \text{의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상}$$

옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

㉠ $b^2 - 4ac > 0$

㉡ $a + c < b$

㉢ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 두 식의 판별식 값이

모두 $b^2 - 4ac$ 이고

$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.

㉡주어진 식에

1을 대입하면 성립한다.

16. 다음 중에서 $2x^3 - (4a + 3)x^2 + 2(3a - 1)x + 4a$ 의 인수인 것은?

① $2x + 1$

② $x + 2$

③ $x + 2a$

④ $x + a$

⑤ $2x - 1$

해설

$$\begin{aligned} & 2x^3 - (4a + 3)x^2 + 2(3a - 1)x + 4a \\ &= 2x^3 - 4ax^2 - 3x^2 + 6ax - 2x + 4a \\ &= (2x^3 - 3x^2 - 2x) - 2a(2x^2 - 3x - 2) \\ &= x(2x^2 - 3x - 2) - 2a(2x^2 - 3x - 2) \\ &= (2x^3 - 3x - 2)(x - 2a) \\ &= (x - 2a)(2x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

17. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} + (i)^{50} \\ &= (-i)^2 + (i)^2 \\ &= -2\end{aligned}$$

18. $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5 + y^5 = -1$

㉡ $x^9 + y^9 = -1$

㉢ $x^{11} + y^{11} = -1$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$$

$$x^2 = -x - 1 \dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 x 를 곱하면

$$x^3 = -x^2 - x = -(x^2 + x) = 1 \quad (\because x^2 + x = -1)$$

$$x^3 = 1, y \text{에 대해서도 마찬가지로 하면 } y^3 = 1$$

$$\text{또한 } x + y = -1, xy = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} x^5 + y^5 &= x^3 \cdot x^2 + y^3 \cdot y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} x^9 + y^9 &= (x^3)^3 + (y^3)^3 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} x^{11} + y^{11} &= (x^3)^3 \times x^2 + (y^3)^3 \times y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

*다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0 \text{ 에서}$$

각각 양변에 $x - 1, y - 1$ 을 곱하면

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0, (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$$

$$x^3 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = y^3 = 1$$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x + y = -1, xy = 1$ 이므로

$$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \therefore x^3 = 1, y^3 = 1$$

19. 좌표평면 위의 원점을 O 라 하고 원 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{OP} = d$ 라 할 때, d 가 정수가 되도록 하는 점 P 의 개수를 구하면?

▶ 답 :

개

▷ 정답 : 8개

해설

원 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 을

표준형으로 고치면 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

중심이 (4, 3) 이고 반지름의 길이가 2 인 원이다.

그림으로 나타내면 다음과 같다.

원 밖의 점 (0, 0) 에서 원의 중심 (4, 3) 까지의

거리가 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이므로 점 P 가

원 위를 움직일 때, d 의 값은 직선 OP 가
원의 중심을 지날 때, 최솟값 $d = 5 - 2 = 3$

과

최대값 $d = 5 + 2 = 7$ 을 가진다.

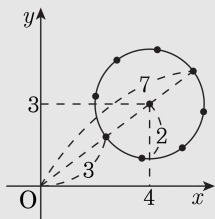
따라서 $3 \leq d \leq 7$ 가 되고,

$d = 3, d = 4, d = 5, d = 6, d = 7$ 일 때

정수가 되는 데 $d = 4, d = 5, d = 6$ 이 되는

점 P 는 두 개씩이 있으므로

$1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$ 모두 8 개이다.



20. $f(x) = 2ax + b$ 가 $0 \leq f(1) \leq 2$, $1 \leq f(2) \leq 3$ 을 만족시킬 때, $f(3)$ 이 취하는 값의 범위의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 1 \leq f(2) \leq 3$$

$$0 \leq 2a + b \leq 2, \quad 1 \leq 4a + b \leq 3$$

두 영역을 그래프에 표시하면, 다음 그림과 같다.

$$f(3) = 6a + b = k \text{ 라 놓으면,}$$

$$b = -6a + k,$$

기울기는 -6 이고, y 절편이 k 인 직선이다.

k 가 최대일 때는 가장 오른쪽에 있는 점을 지날 때,

최소일 때는 가장 왼쪽에 있는 점을 지날 때이다.

최댓값은 $D \left(\frac{3}{2}, -3 \right)$ 를 지날 때,

$$6 \times \frac{3}{2} - 3 = 6,$$

최솟값은 $A \left(-\frac{1}{2}, 3 \right)$ 지날 때,

$$6 \times -\frac{1}{2} + 3 = 0$$

$$\therefore 6 + 0 = 6$$

