1. 제 3항이 -12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = -12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = 8$

$\therefore r = 2$

$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$

$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$

2. 수열 $1,\ a,\ \frac{1}{16},\ b, \cdots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2　　② 4　　③ 8　　④ 16　　⑤ 32

해설

첫째항$= 1$, 공비$= a$

$a_n = a^{n-1}$

$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm\frac{1}{4}$

$a_4 = a^3 = \pm\frac{1}{64} = b$

$\therefore \dfrac{\pm\frac{1}{4}}{\pm\frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16$($\because$복호동순)

3. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{9}(3^{10}-1)$　② $\frac{1}{10}(3^{10}-1)$　③ $\frac{1}{9}(3^{10}+1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10}+1)$　⑤ $\frac{1}{9}(3^{11}-1)$

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$ar^3 = 6,\ ar^6 = 162$
$r^3 = 27$
$\therefore\ r = 3,\ a = \frac{2}{9}$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9}\cdot(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{1}{9}(3^{10}-1)$$

4. 표의 빈칸에 6 개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6 개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$\therefore 5+6+8+10+9+13=51$

5. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 77$
$a_{10} = a + 9d = 42$
$5d = -35$
$d = -7$
$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore \ a = 105$

$$\therefore \ a_n = 105 + (n-1) \times (-7) = -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$112 < 7n$
$16 < n$
$\therefore n = 17$

6. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$\frac{1}{x}=6$, $\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{z}=4$

$\therefore\ x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$

7. 두 수 2와 12 사이에 8개의 수를 넣어서 만든 수열 2, a_1, a_2, $\cdots$, a_8, 12가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_8$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 56

해설

$2 + a_1 + \cdots + a_8 + 12$

$= \dfrac{10(2+12)}{2} = 70$

$\therefore a_1 + \cdots + a_8 = 70 - 14 = 56$

8. 첫째항부터 제4항까지의 합이 38, 첫째항부터 제10항까지의 합이 185인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

① 660　② 670　③ 680　④ 690　⑤ 600

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4 = \frac{4(2a+3d)}{2} = 38$

$\therefore\ 2a+3d = 19 \cdots$ ㉠

$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 185$

$\therefore\ 2a+9d = 37 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=3$

$\therefore\ S_{20} = \frac{20\{2\times 5+(20-1)\times 3\}}{2} = 670$

9. 100 이하의 자연수 중에서 3 으로 나누었을 때 나머지가 2 인 수의 합은?

① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면
$2, 5, 8, \cdots, 98$ 이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열을 이룬다.
이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 일반항 a_n 은
$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$
이때, 끝항 98 은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98 은 제 33 항이다.
따라서 구하는 합을 S 라 하면
$S = \dfrac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$

10. 첫째항이 100이고, 공차가 −3인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34번째 항

해설

$a_n = 100 + (n-1) \cdot (-3)$

$= -3n + 103 > 0$

$n < 34.333\cdots$

$\therefore n = 34$일 때 최대

11. 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 각각 n^2+kn, $2n^2-2n+1$일 때, $a_{10}=b_{10}$을 만족하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$a_{10}=(10^2+10k)-(9^2+9k)=19+k$

$b_{10}=(2\cdot10^2-2\cdot10+1)-(2\cdot9^2-2\cdot9+1)$
$=181-145=36$

$a_{10}=b_{10}$에서 $19+k=36$

$\therefore\ k=17$

12. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5a_7 = 6$일 때, $a_2a_4a_6a_8a_{10}$의 값은?

① $\pm 6\sqrt{6}$　② $\pm 18\sqrt{6}$　③ $\pm 36\sqrt{6}$
④ $\pm 8\sqrt{6}$　⑤ ± 243

해설

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_2,\ a_6,\ a_{10}$과 $a_4,\ a_6,\ a_8$ 그리고 $a_5,\ a_6,\ a_7$은 모두 등비수열을 이룬다.
따라서 a_6은 a_2와 a_{10}, a_4와 a_8, a_5와 a_7의 등비중항이므로

$$\begin{aligned} a_2a_4a_6a_8a_{10} &= (a_2a_{10})(a_4a_8)a_6 \\ &= a_6^2 \cdot a_6^2 \cdot a_6 \\ &= a_6^5 \end{aligned}$$

이때, $a_5a_7 = a_6^2 = 6$이므로 $a_6 = \pm\sqrt{6}$
$\therefore a_6^5 = \pm 36\sqrt{6}$

13. 세 양수 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

㉠ $a+b+c=\frac{7}{2}$	㉡ $abc=1$

이때 $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

공비를 r라 하면 $a+b+c=a+ar+ar^2=\frac{7}{2}$에서

$a(1+r+r^2)=\frac{7}{2}\cdots$㉠

또, $abc=a\cdot ar\cdot ar^2=1$에서 $a^3r^3=(ar)^3=1$이고

a, r는 실수이므로 $ar=1\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2}$, $2r^2+2r+2=7r$, $2r^2-5r+2=0$

$(r-2)(2r-1)=0$ $\therefore r=2$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 세 수는 2, 1, $\frac{1}{2}$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

14. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $S_{10}=48$, $S_{20}=60$이다. 이때, S_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$S_{10}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=48\cdots$ ㉠

$S_{20}=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=60\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{r^{20}-1}{r^{10}-1}=\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{(r^{10}+1)(r^{10}-1)}{r^{10}-1}=\dfrac{5}{4}$

$r^{10}+1=\dfrac{5}{4}\quad\therefore\ r^{10}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ S_n=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}\cdot(r^{20}+r^{10}+1)$

$=48\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}+1\right)=63$

15. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의 최솟값을 구하면 된다.
그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로
$2^{11} = 2048$
$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$
$n - 1 \geq 11$
$n \geq 12$

16. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, $\cdots$ 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30}-2$원 ② $3^{30}-1$원 ③ 3^{30}원

④ $3^{30}+1$원 ⑤ $3^{30}+2$원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r=3$

$a=2,\ r=3$

$\therefore\ S_{30}=\dfrac{2\cdot(3^{30}-1)}{3-1}=3^{30}-1$

17. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{10},\ 10$ $1,\ b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots,\ b_{20},\ 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$ ② $\dfrac{10}{20}$ ③ $\dfrac{20}{11}$ ④ $\dfrac{21}{11}$ ⑤ 2

해설

$a'_n = 1 + (n-1) \times d$

$a'_{12} = 1 + 11d = 10$

$d = \dfrac{9}{11}$

$\therefore a'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{11}$

$b'_n = 1 + (n-1) \times d$

$b'_{22} = 1 + 21d = 10$

$d = \dfrac{9}{21}$

$\therefore b'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1} = \frac{a'_{11}-a'_2}{b'_{11}-b'_2} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{9 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

18. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$의 값은?

$a_n = 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots$

① $2^{200} - 1$ ② $2^{200} - 2$ ③ $2^{200} - 100$
④ $2^{199} - 2^{99}$ ⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$
$a_{200} = 2^{199}$
$a_{100} = 2^{99}$
$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$

19. $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\cdots+\frac{1}{21^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{3}{22}$ ③ $\frac{5}{22}$ ④ $\frac{7}{22}$ ⑤ $\frac{9}{22}$

해설

$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{(2n+1-1)(2n+1+1)}$

$=\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}$

$=\frac{1}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n+1-n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\sum_{k=1}^{10}a_k$

$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{10}{44}=\frac{5}{22}$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{31}{21}$　④ $\frac{40}{21}$　⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$\alpha_n+\beta_n=-4$

$\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$

$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{4}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$