

1. 제 3항이 -12 이고 제 6항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = -12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = 8$$

$$\therefore r = 2$$

$$ar^2 = 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$$

2. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

3. 제 4항이 6, 제 7항이 162 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$ ② $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$ ③ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$ ⑤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

4. 표의 빈칸에 6개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$$\therefore 5 + 6 + 8 + 10 + 9 + 13 = 51$$

5. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 77$$

$$a_{10} = a + 9d = 42$$

$$5d = -35$$

$$d = -7$$

$$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore a = 105$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 105 + (n-1) \times (-7) \\ &= -7n + 112 \end{aligned}$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$112 < 7n$$

$$16 < n$$

$$\therefore n = 17$$

6. 두 수 $\frac{1}{7}$ 과 $\frac{1}{3}$ 의 사이에 세 개의 수 x, y, z 를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x + y + z)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 조화수열을 이루려면 $7, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 3$ 이 등차수

열을 이루어야 하므로

$$\frac{1}{x} = 6, \frac{1}{y} = 5, \frac{1}{z} = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60(x + y + z) = 60 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 60 \cdot \frac{37}{60} = 37$$

7. 두 수 2와 12 사이에 8개의 수를 넣어서 만든 수열 $2, a_1, a_2, \dots, a_8, 12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_8$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$$\begin{aligned} & 2 + a_1 + \dots + a_8 + 12 \\ &= \frac{10(2 + 12)}{2} = 70 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + \dots + a_8 = 70 - 14 = 56$$

8. 첫째항부터 제4항까지의 합이 38, 첫째항부터 제10항까지의 합이 185인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은?

① 660

② 670

③ 680

④ 690

⑤ 600

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4 = \frac{4(2a + 3d)}{2} = 38$$

$$\therefore 2a + 3d = 19 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 185$$

$$\therefore 2a + 9d = 37 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 5$, $d = 3$

$$\therefore S_{20} = \frac{20 \{ 2 \times 5 + (20 - 1) \times 3 \}}{2} = 670$$

9. 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수의 합은?

① 1600

② 1620

③ 1650

④ 1680

⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면 2, 5, 8, $\dots$, 98이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룬다.

이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n - 1) \times 3 = 3n - 1$$

이때, 끝항 98은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98은 제 33항이다.

따라서 구하는 합을 S 라 하면

$$S = \frac{33(2 + 98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$$

10. 첫째항이 100이고, 공차가 -3 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34 번째 항

해설

$$a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-3)$$

$$= -3n + 103 > 0$$

$$n < 34.333 \dots$$

$\therefore n = 34$ 일 때 최대

11. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $n^2 + kn$, $2n^2 - 2n + 1$ 일 때, $a_{10} = b_{10}$ 을 만족하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$a_{10} = (10^2 + 10k) - (9^2 + 9k) = 19 + k$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= (2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 + 1) - (2 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9 + 1) \\ &= 181 - 145 = 36 \end{aligned}$$

$$a_{10} = b_{10} \text{ 에서 } 19 + k = 36$$

$$\therefore k = 17$$

12. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5a_7 = 6$ 일 때, $a_2a_4a_6a_8a_{10}$ 의 값은?

① $\pm 6\sqrt{6}$

② $\pm 18\sqrt{6}$

③ $\pm 36\sqrt{6}$

④ $\pm 8\sqrt{6}$

⑤ ± 243

해설

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 a_2, a_6, a_{10} 과 a_4, a_6, a_8 그리고 a_5, a_6, a_7 은 모두 등비수열을 이룬다.

따라서 a_6 은 a_2 와 a_{10} , a_4 와 a_8 , a_5 와 a_7 의 등비중항이므로

$$\begin{aligned}a_2a_4a_6a_8a_{10} &= (a_2a_{10})(a_4a_8)a_6 \\&= a_6^2 \cdot a_6^2 \cdot a_6 \\&= a_6^5\end{aligned}$$

이때, $a_5a_7 = a_6^2 = 6$ 이므로 $a_6 = \pm\sqrt{6}$

$$\therefore a_6^5 = \pm 36\sqrt{6}$$

13. 세 양수 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{㉠} \quad a + b + c = \frac{7}{2}$$

$$\textcircled{㉡} \quad abc = 1$$

이때 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

$$\textcircled{1} \quad \frac{13}{4}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{15}{4}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{17}{4}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{19}{4}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{21}{4}$$

해설

공비를 r 라 하면 $a + b + c = a + ar + ar^2 = \frac{7}{2}$ 에서

$$a(1 + r + r^2) = \frac{7}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = 1$ 에서 $a^3 r^3 = (ar)^3 = 1$ 이고
 a, r 는 실수이므로 $ar = 1 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$\frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{7}{2}, \quad 2r^2 + 2r + 2 = 7r, \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(r - 2)(2r - 1) = 0 \quad \therefore r = 2 \text{ 또는 } r = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{㉠} \text{ 에서 } a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 세 수는 2, 1, $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

14. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $S_{10} = 48$, $S_{20} = 60$ 이다. 이때, S_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 48 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = 60 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} \div \textcircled{A}$ 을 하면

$$\frac{r^{20} - 1}{r^{10} - 1} = \frac{5}{4}, \quad \frac{(r^{10} + 1)(r^{10} - 1)}{r^{10} - 1} = \frac{5}{4}$$

$$r^{10} + 1 = \frac{5}{4} \quad \therefore r^{10} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{a(r^{30} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} \cdot (r^{20} + r^{10} + 1)$$

$$= 48 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 \right) = 63$$

15. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11 항

② 12 항

③ 13 항

④ 14 항

⑤ 15 항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n - 1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

16. 광이가 첫째 날에 2원, 둘째 날에 6원, 셋째 날에 18원, ... 과 같이 매일 전날의 3배씩 30일 간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $3^{30} - 2$ 원

② $3^{30} - 1$ 원

③ 3^{30} 원

④ $3^{30} + 1$ 원

⑤ $3^{30} + 2$ 원

해설

전날의 3배씩 모으므로 공비 $r = 3$

$$a = 2, r = 3$$

$$\therefore S_{30} = \frac{2 \cdot (3^{30} - 1)}{3 - 1} = 3^{30} - 1$$

17. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$$

$$1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1}$ 의 값은?

① $\frac{10}{21}$

② $\frac{10}{20}$

③ $\frac{20}{11}$

④ $\frac{21}{11}$

⑤ 2

해설

$$a'_n = 1 + (n-1) \times d$$

$$a'_{12} = 1 + 11d = 10$$

$$d = \frac{9}{11}$$

$$\therefore a'_n = 1 + (n-1) \times \frac{9}{11}$$

$$b'_n = 1 + (n-1) \times d$$

$$b'_{22} = 1 + 21d = 10$$

$$d = \frac{9}{21}$$

$$\therefore b'_n = 1 + (n-1) \times \frac{9}{21}$$

$$\frac{a_{10} - a_1}{b_{10} - b_1} = \frac{a'_{11} - a'_2}{b'_{11} - b'_2} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{9 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$ 의 값은?

$$a_n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

① $2^{200} - 1$

② $2^{200} - 2$

③ $2^{200} - 100$

④ $2^{199} - 2^{99}$

⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{200} = 2^{199}$$

$$a_{100} = 2^{99}$$

$$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$$

19. $\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \cdots + \frac{1}{21^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{22}$

② $\frac{3}{22}$

③ $\frac{5}{22}$

④ $\frac{7}{22}$

⑤ $\frac{9}{22}$

해설

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{(2n+1-1)(2n+1+1)}$$

$$= \frac{1}{2n \cdot (2n+2)}$$

$$= \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n+1-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{10}{44} = \frac{5}{22}$$

20. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$ 의 두근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

① $\frac{11}{21}$

② $\frac{20}{21}$

③ $\frac{31}{21}$

④ $\frac{40}{21}$

⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\alpha_n + \beta_n = -4$$

$$\alpha_n \beta_n = -(2n-1)(2n+1)$$

$$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{4}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21}$$