

1. x 에 대한 항등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + cx(x - 1)$ 에서 a, b, c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

계수비교법에 의하여

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + cx(x - 1)$$

$$= cx^2 + (b - c)x + a - b$$

$$x^2 - 2x + 3 = cx^2 + (b - c)x + a - b \text{에서}$$

$$c = 1, b - c = -2, a - b = 3$$

연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = -1, c = 1$$

2. $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 a, b, c 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = -1, c = 2$ ② $a = -1, b = 1, c = -2$
③ $a = 1, b = 1, c = 2$ ④ $a = -1, b = -1, c = -2$
⑤ $a = 1, b = -1, c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$$x = 0 \text{을 대입 } -2 = -2a \quad \therefore a = 1$$

$$x = 1 \text{을 대입 } -3 = 3b \quad \therefore b = -1$$

$$x = -2 \text{를 대입 } 12 = 6c \quad \therefore c = 2$$

3. x 에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

- ① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면 $(4x^2-3x+1)^5=a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$ 과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 을 구하려면 $x=1$ 을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+3)(x-6)$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$ 이었다. $f(x)$ 를 $(x+3)$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$$f(x) = (x+3)(x-6)Q(x) + x-2 \text{ 이므로}$$

$$f(-3) = -5$$

5. $f(x) = x^2 - ax + 1$ 이 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

6. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$ 으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$$

$$\therefore 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$$

$$\therefore 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -13$, $b = 8$

7. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$\textcircled{5} \quad x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

8. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0$ 이므로

(준식) $= (x-1)(x-2)(x-3)$

9. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

10. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 1, b = 2$
- ② $a = 2, b = 2$
- ③ $a = 2, b = 0$
- ④ $a = 0, b = 2$
- ⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면
 $(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$
이 식을 x, y 에 대하여 정리하면
 $(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$
이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로
 $a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

11. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
 $x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $= (x-1)^2(x+k) + 2x + 1$
 $= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = k - 2, b = 3 - 2k, 3 = k + 1$
 $k = 2$ 이므로 $a = 0, b = -1$
 $\therefore a - b = 0 - (-1) = 1$

12. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$
 $x = -1$ 을 양변에 대입하면 $R = -1$
 $\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$
 $\textcircled{1}$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $3 = 2Q(1) - 1$
 $\therefore Q(1) = 2$

13. 다항식 $f(x)$ 를 $(3x+2)(x-4)$ 로 나눈 나머지가 $-2x+1$ 일 때, $f(x^2+3)$ 을 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① 7

② 4

③ 0

④ -4

⑤ -7

해설

$$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x^3+3) = (x-1)Q'(x) + R \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변에 } x=4 \text{를 대입하면 } f(4) = -7$$

$$\textcircled{2} \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } f(4) = R$$

$$\therefore R = -7$$

14. $3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$ 을 인수분해 하면?

① $(x + y + 1)(3x + y - 3)$

② $(x - y + 1)(3x - y - 3)$

③ $(3x + y + 1)(x - y - 3)$

④ $(x + y + 1)(3x - y - 3)$

⑤ $(x - y - 1)(3x - y - 3)$

해설

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3 \\ &= (3x - (y + 3))(x + y + 1) \\ &= (x + y + 1)(3x - y - 3) \end{aligned}$$

15. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

16. $a + b + c = 4$, $ab + bc + ca = 3$, $abc = 1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 30

② 31

③ 32

④ 33

⑤ 34

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{위 식에 따라 } a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 4 \times (10 - 3) + 3 \times 1$$

$$= 31$$

17. $x + y - 1 = 0$ 일 때, 다음 중 $2x^2 + y^2 - xy - 8$ 의 인수인 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x + 2$

④ $4x + 5$

⑤ $4x + 7$

해설

$$\begin{aligned} & x + y - 1 = 0 \text{ 에서 } y = -x + 1 \\ \therefore & 2x^2 + y^2 - xy - 8 \\ &= 2x^2 + (-x + 1)^2 - x(-x + 1) - 8 \\ &= 4x^2 - 3x - 7 \\ &= (4x - 7)(x + 1) \end{aligned}$$

18. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 을 바르게 인수분해 한 것을 찾으려면?

① $(x^2 + 1)(x + 3)(x + 1)$

② $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$

③ $(x^2 + 1)(x - 3)(x - 1)$

④ $(x^2 - 3)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ &= (x^4 - 2x^2 - 3) + 2x^3 + 2x \\ &= (x^2 - 3)(x^2 + 1) + 2x(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

19. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$ 가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a \\ &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a \\ & x^2+8x=A \text{로 놓으면} \\ & (\text{준식})=(A+7)(A+15)+a \\ & \quad =A^2+22A+105+a \\ & \quad = (A+11)^2-16+a \end{aligned}$$

따라서, $a=16$ 일 때 이차식 $x^2+8x+11$ 의 완전제곱식이 된다.

20. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

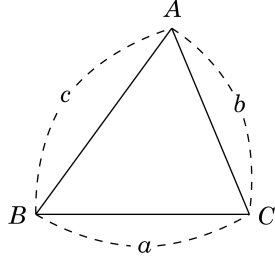
해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

21. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에서 $a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?



- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 ③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형
 ⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) + bc(b+c) - ca(c+a) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 + b^2c + bc^2 - c^2a - ca^2 \\ &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^3 + b^2c + bc^2 + c^3 \\ &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + b^2(b+c) + c^2(b+c) \\ &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b+c)(b^2+c^2) \\ &= a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\ &= (a-b-c)a^2 - (b^2+c^2)(a-b-c) \\ &= (a-b-c)(a^2 - b^2 - c^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이 때, a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a \neq b+c$
 $\therefore a^2 - b^2 - c^2 = 0$,
 즉 $a^2 = b^2 + c^2$
 따라서, $\triangle ABC$ 는 a 를 빗변으로 하는 직각삼각형,
 즉 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

22. $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2)$ 을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4 + 324)(23^4 + 324)(35^4 + 324)(47^4 + 324)}{(5^4 + 324)(17^4 + 324)(29^4 + 324)(41^4 + 324)}$$

- ① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) \\ &= \{(x - y)^2 + y^2\}\{(x + y)^2 + y^2\} \text{ 이고,} \\ 324 &= 4 \times 3^4 \text{ 이므로} \\ 11^4 + 324 &= (11^2 - 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2)(11^2 + 2 \times 11 \times 3 + 2 \times 3^2) \\ &= \{(11 - 3)^2 + 3^2\}\{(11 + 3)^2 + 3^2\} \\ &= (8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2) \end{aligned}$$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\frac{\{(8^2 + 3^2)(14^2 + 3^2)\}\{(20^2 + 3^2)(26^2 + 3^2)\}}{\{(2^2 + 3^2)(8^2 + 3^2)\}\{(14^2 + 3^2)(20^2 + 3^2)\}} \\ &\frac{\{(32^2 + 3^2)(38^2 + 3^2)\}\{(44^2 + 3^2)(50^2 + 3^2)\}}{\{(26^2 + 3^2)(32^2 + 3^2)\}\{(38^2 + 3^2)(44^2 + 3^2)\}} \\ &= \frac{50^2 + 3^2}{2^2 + 3^2} = \frac{2509}{13} = 193 \end{aligned}$$

23. $x-1$ 로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 -1 인 다항식 $f(x)$ 가 있다. $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. $f(0)=0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $Q(0)=0$ 이다.

㉡ $f(x)$ 는 이차식이 될 수 없다.

㉢ $f(x)$ 가 삼차식이면 $f(x)=x^3$ 이다

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
 $f(1)=a+b=1, \quad f(-1)=-a+b=-1$
 $\therefore a=1, b=0$
 $\therefore f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$
 ㉠ $f(0)=-Q(0)=0 \quad \therefore$ 참
 ㉡ $f(x)$ 가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$ 가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$ 이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$ 참
 ㉢ $Q(0)=0$ 이므로 $Q(x)=ax \ (a \neq 0)$
 $\therefore f(x)=ax(x^2-1)+x \ (a \neq 0) \quad \therefore$ 거짓

24. 함수 $f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 을 10으로 나눈 나머지는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 의 일의 자리만 보면 된다.
 $f(5)$ 이후부터는 10으로 나누어떨어지므로
10으로 나누어떨어지지 않는 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 까지 더하면
 $1 + 2 + 6 + 24 = 33$
따라서 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$ 을 10으로 나눈 나머지는 3이다.

25. x 에 대한 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) + 2 = 0, \alpha f(\alpha) + 2 = 0$

$$f(\alpha) = -2, \alpha = 1$$

$$\therefore f(1) = -2$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -3$$