1. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1　　② 1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 2

해설

복소수 z를 $a + bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$ 이면 $z = 0 + 0i = 0$ 이므로
$z \neq 0$ 라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

2. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$\quad = 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

3. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b = 5,\ a = 3$
$\therefore\ a+b = 8$

4. $(\sqrt{3}-i)^2 \times (\sqrt{12}+2i)^2$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

(준 식) $= (\sqrt{3}-i)^2 \times (2\sqrt{3}+2i)^2$

$= 2^2 \times \left\{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)\right\}^2$

$= 2^2 \times 4^2 = 2^2 \times 2^4 = 2^6$

$= 64$

5. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=\frac{1}{i}^{5}+\frac{1}{i}^{6}+\frac{1}{i}^{7}+\frac{1}{i}^{8}\cdots$$

$$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=-i-1+i+1=0$$

$$\therefore\ (\text{준식})=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}$$

$$=1-i-1=-i$$

6. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$ 가 -3 이므로 $-3 + 5 = 2$

7. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.
>
> ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.
따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣ $$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

8. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸다. $\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4 + 3i$ ② $3 + 3i$ ③ $2 + 3i$

④ $1 + 3i$ ⑤ $-1 + 3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4\\ &= 4 + 3i\end{aligned}$$

9. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

10. $a < 0,\ b < 0$ 일 때 다음 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ② $\sqrt{a^3 b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

해설

$a < 0,\ b < 0$ 이므로,

① $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-a}i\sqrt{-b}i$

$= \sqrt{-a}\sqrt{-b}i^2$

$= -\sqrt{-a}\sqrt{-b}$

$= -\sqrt{ab}$

$(\because -a > 0,\ -b > 0)$

따라서, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3 b} = \sqrt{a^2 \cdot (ab)}$

$= \sqrt{a^2}\sqrt{ab}$

$= |a|\sqrt{ab}$

$= -a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{|b|}{\sqrt{a}} = -\dfrac{b}{\sqrt{a}} = -\dfrac{b\sqrt{a}}{|a|} = \dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$