1. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면

$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

즉, $x^2-1=0$, $x=\pm 1$

한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로

$z\neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ x=-1$

2. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$z = 3(k+2i) - k(-2i)$$
$$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow \text{순허수}$$
$$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$$

3. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b=5,\ a=3$

$\therefore\ a+b=8$

4. $(\sqrt{3}-i)^2 \times (\sqrt{12}+2i)^2$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$(\text{준 식}) = (\sqrt{3}-i)^2 \times (2\sqrt{3}+2i)^2$$
$$= 2^2 \times \left\{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)\right\}^2$$
$$= 2^2 \times 4^2 = 2^2 \times 2^4 = 2^6$$
$$= 64$$

5. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=\frac{1}{i}^{5}+\frac{1}{i}^{6}+\frac{1}{i}^{7}+\frac{1}{i}^{8}\cdots$$

$$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$$

$$=-i-1+i+1=0$$

$$\therefore\ (\text{준식})=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}$$

$$=1-i-1=-i$$

6. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$ 가 -3 이므로 $-3 + 5 = 2$

7. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha + \overline{\alpha}$ 는 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha - \overline{\alpha}$ 는 허수이다.
>
> ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉣　　⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \overline{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \overline{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{\alpha} + \overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

8. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다. $\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$ ② $3+3i$ ③ $2+3i$

④ $1+3i$ ⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

9. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^{n}$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

10. $a<0,\ b<0$ 일 때 다음 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

해설

$a<0,\ b<0$ 이므로,

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-a}i\sqrt{-b}i$

$=\sqrt{-a}\sqrt{-b}i^2$

$=-\sqrt{-a}\sqrt{-b}$

$=-\sqrt{ab}$

$(\because -a>0,\ -b>0)$

따라서, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot(ab)}$

$=\sqrt{a^2}\sqrt{ab}$

$=|a|\sqrt{ab}$

$=-a\sqrt{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

④ $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a}}=-\dfrac{b}{\sqrt{a}}=-\dfrac{b\sqrt{a}}{|a|}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

⑤ $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$