

1. $x > 0, x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[k]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

2. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ 를 $4^{\frac{n}{m}}$ 으로 나타낼때, $m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 서로소인 자연수)

- ① 21
- ② 22
- ③ 39
- ④ 41
- ⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}} \\ \therefore m &= 36, n = 13 \\ \therefore m+n &= 49\end{aligned}$$

3. $x > y > 0$ 일 때, $\frac{x^y y^x}{y^y x^x}$ 를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

② $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}$

③ 1

④ $\left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$

⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

4. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

5. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$$

6. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$ 이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -115$ 일 때, 자연수 k 의 값은?

① 43

② 44

③ 45

④ 46

⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$ 이므로

$$a_n = 23 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 26$$

$$-3k + 26 = -115 \text{ 에서 } -3 = -141$$

$$\therefore k = 47$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$ 일 때, a_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= b_n = 2n - 5 \\ \therefore a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 5) \\ &= 2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 5(n-1) \\ &= n^2 - 6n + 7 \\ \therefore a_{30} &= 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727 \end{aligned}$$

8. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \boxed{\text{가}} &= \frac{1}{2}(a_n - \boxed{\text{가}}) \text{이므로} \\ a_n &= \boxed{\text{가}} + (a_1 - \boxed{\text{가}})(\boxed{\text{나}})^{n-1} \end{aligned}$$

- ① $1, \frac{1}{2}$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $2, 2$ ⑤ $3, \frac{1}{2}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \text{에서}$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \text{가} = 2, \text{나} = \frac{1}{2}$$

9. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

- $a_1 = 1, a_2 = 2$
- $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore p = 3, q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

10. $\log_3 2 + \log_3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3 \left(1 + \frac{1}{80}\right)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \log_3 2 + \log_3 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3 \left(1 + \frac{1}{80}\right) \\ &= \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{81}{80} \\ &= \log_3 \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{81}{80}\right) \\ &= \log_3 81 = \log_3 3^4 \\ &= 4\log_3 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

11. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\log_4(a+2b) + \log_4\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 1

② $\frac{3}{2}$

③ 2

④ $\frac{2}{5}$

⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b) + \log_4\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \log_4\left(\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} + 4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}} = 4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$

12. $A = (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3})$, $B = (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8)$

일 때, AB 의 값은?

- ① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$$\begin{aligned} A &= (\log_3 9)(\log_4 9 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}) \\ &= (\log_3 3^2)(\log_4 3^2 + \log_{2^{-1}} 3^{-1}) \\ &= (2 \log_3 3^2)(\frac{2}{2} \log_2 3 + \frac{-1}{-1} \log_2 3) \\ &= 2(\log_2 3 + \log_2 3) = 2 \cdot \log_2 3 = 4 \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (\log_{\sqrt{3}} 5 + \log_9 5)(\log_5 64 + \log_{25} 8) \\ &= (\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5 + \log_{3^2} 5)(\log_5 2^6 + \log_{5^2} 2^3) \\ &= (2 \log_3 5 + \frac{1}{2} \log_3 5)(6 \log_5 2 + \frac{3}{2} \log_5 2) \\ &= \frac{5}{2} \log_3 5 \cdot \frac{15}{2} \log_5 2 \\ &= \frac{75}{4} \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 \\ &= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5} \\ &= \frac{75}{4} \cdot \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{75}{4} \log_3 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= 4 \log_2 3 \cdot \frac{75}{4} \log_3 2 \\ &= 4 \cdot \frac{75}{4} \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 75 \end{aligned}$$

13. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로
$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{0.141} &= \frac{1}{3} \log 0.141 = \frac{1}{3} \log (1.41 \times 10^{-1}) \\ &= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1) \\ &= -0.2836 = -1 + 0.7164\end{aligned}$$
따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164이다.

14. $\log x$ 의 정수 부분이 4이고, $\log y$ 의 정수 부분이 2일 때, $\log \sqrt{xy}$ 의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\log x = 4 + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log y = 2 + \beta \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

$$= \frac{1}{2} (4 + \alpha + 2 + \beta)$$

$$= 3 + \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta < 1 \text{ 이므로}$$

$$0 \leq \frac{1}{2} (\alpha + \beta) < 1$$

$$\therefore \log \sqrt{xy} \text{의 정수 부분은 } 3$$

15. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 275 &= \log_{10}^{25 \times 11} = 2 \log_{10}^5 + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - \log_{10}^2) + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - 0.301) + 1.041 \\ &= 2.439 \\ &\text{소수 셋째 자리에서 반올림하면 } 2.44\end{aligned}$$

16. 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 x, y 에 대하여 xy 는?

- ㉠ x 와 y 의 상용로그의 정수 부분은 같다.

㉡ x 와 $\frac{1}{y}$ 의 상용로그의 소수 부분은 같다.

㉢ x^3y^2 의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

- ① 10
- ② 100
- ③ 1000
- ④ 2500
- ⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)
 $\log y = n + \beta (0 \leq \beta < 1)$
㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$
 $= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$
 $= (-n - 1) + 1 - \beta$
 $1 - \beta = \alpha$
 $\therefore \alpha + \beta = 1$
㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$
 $= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$
 $= 5n + 3\alpha + 2\beta$
정수 부분이 7이므로
소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2$, $n = 1$
 $\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$
 $= n + \alpha + n + \beta$
 $= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$
 $\therefore xy = 10^3 = 1000$

17. 다음 <보기> 중 $\log A$ 와 소수 부분이 항상 같은 것으로 묶어 놓은 것은? (단, 로그는 상용로그)

보기

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $10 \log A$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $10 - \log A$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $\log 10A$
- $\textcircled{\text{㉤}}$ $(\log A) - 10$
- $\textcircled{\text{㉥}}$ $\log \frac{A}{10}$

- $\textcircled{\text{1}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{2}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}$
- $\textcircled{\text{3}}$ $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}, \textcircled{\text{㉥}}$
- $\textcircled{\text{4}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉥}}$
- $\textcircled{\text{5}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}, \textcircled{\text{㉥}}$

해설

소수 부분이 같으려면
진수의 숫자의 배열이 같아야하므로
 $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉤}}, \textcircled{\text{㉥}}$

18. $\log x$ 의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분을 n , 소수 부분을 α 라 할 때 $n+8\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\log x = 3 + \beta \quad (0 \leq \beta < 1)$$

$$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \log x = 1 + \frac{\beta}{3}$$

$$\therefore \beta + \frac{\beta}{3} = 1$$

$$\therefore \beta = \frac{3}{4}$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3 + \alpha) = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{4}$$

$$n = 2, \alpha = \frac{1}{4}$$

$$n + 8\alpha = 2 + 2 = 4$$

19. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$ 의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x + 1)$, $\log(2^x + 7)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log(2^x + 1) = \log 3 + \log(2^x + 7)$$

$$\log(2^x + 1)^2 = \log 3(2^x + 7) \Leftrightarrow (2^x + 1)^2 = 3(2^x + 7)$$

$$2^x = t \text{로 치환하면, } (t + 1)^2 = 3(t + 7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$$

$$(t + 4)(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 (\because t > 0)$$

$$\therefore 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{1 - 0.3}{0.3} = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

20. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

- I. $a_1 = 3$
II. a_{n+1} 은 a_n^2 을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값은?

- ① 20
- ② 24
- ③ 35
- ④ 40
- ⑤ 42

해설

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 4 \\ a_4 &= 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$
$$\therefore, \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$$

21. 3의 세제곱근 중 실수인 것을 a , 9의 세제곱근 중에 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $\sqrt[3]{9}$ ⑤ 9

해설

3의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$
이므로 $a = \sqrt[3]{3}$
9의 세제곱근 중에 실수인 것은 $\sqrt[3]{9}$
따라서, 구하는 값은
 $ab = \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

22. 세 수 $A = \sqrt[3]{-3}$, $B = \sqrt[5]{-6}$, $C = \sqrt[15]{-225}$ 에 대하여 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?
- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A = \sqrt[3]{-3}$, $B = \sqrt[5]{-6}$, $C = \sqrt[15]{-225}$ 에서
3, 5, 15의 최소공배수는 15이므로 각 수를 모두 15제곱한다.
 $A^{15} = (\sqrt[3]{-3})^{15} = \{(\sqrt[3]{-3})^3\}^5 = (-3)^5 = -243$
 $B^{15} = (\sqrt[5]{-6})^{15} = \{(\sqrt[5]{-6})^5\}^3 = (-6)^3 = -216$
 $C^{15} = (\sqrt[15]{-225})^{15} = -225$
이므로 $A^{15} < C^{15} < B^{15}$
 $\therefore A < C < B$

23. $a > 0$ 이고 $t = \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})$ 일 때, $(t + \sqrt{t^2 + 1})^3$ 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

- ① a^2 ② a ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\sqrt{a}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$$\begin{aligned} t + \sqrt{t^2 + 1} &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{3}} - 2 + a^{-\frac{2}{3}}) + 1} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + 2 + a^{-\frac{1}{3}})^2} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})^2} \\ &= \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}) + \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}) = a^{\frac{1}{3}} \\ \therefore (t + \sqrt{t^2 + 1})^3 &= (a^{\frac{1}{3}})^3 = a \end{aligned}$$

24. 함수 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$ 인 양수)에 대하여 다음 물음에
 답하여라.

a 가 $1 + \sqrt{3}$ 의 세제곱근 중 실수인 값이라 할 때, 등식 $f\left(\frac{3}{2}\right) = p + q\sqrt{3}$
 을 만족하는 유리수 p, q 에 대하여 $p + q$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}}$ 이므로 $a^3 = 1 + \sqrt{3}$ 이다.

$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$ 이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{a^3 - 1}{a^3 + 1} = \frac{1 + \sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} + 1}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$

$= -3 + 2\sqrt{3}$

$\therefore p + q = -3 + 2 = -1$

25. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 라고 할 때, $\log_8 125$ 를 a , b 로 나타내면?

① $1 - 2b$

② $2b - a$

③ $a - b$

④ $\frac{b}{a}$

⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$$

$$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$$

26. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 10^{-12}W/m^2 와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\text{W/m}^2$ 를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10 \log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB 일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

- ① 10^9 배

② 10^{10} 배

③ 10^{11} 배

④ 10^{12} 배

⑤ 10^{13} 배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB 이므로 이 소리의 세기를 a 라 하면
 $130 = 120 + 10 \log a$
 $10 = 10 \log a$
 $1 = \log a$
 $\therefore a = 10$
따라서 표준음의 세기의 $\frac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$ (배)

27. 5년에 한 번씩 시행하는 인구주택총조사 결과 A 시의 인구는 5년마다 7%증가한다고 한다. 2015년의 A 시의 인구가 100만 명이었을 때, 2050년의 이 시의 인구는? (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 1.62 = 0.21$ 로 계산한다.)

- ① 121만명 ② 145만명 ③ 162만명
④ 178만명 ⑤ 185만명

해설

2050년은 2015년으로부터 35년 후이고 35년은 5년이 7번 지난 것이므로 2050년의 A의 인구는

$$100 \times (1 + 0.07)^7 = 100 \times 1.07^7 (\text{만 명})$$

$$\log 1.07^7 = 7 \log 1.07 = 7 \times 0.03 = 0.21$$

이때 $\log 1.62 = 0.21$ 이므로

$$1.07^7 = 1.62$$

따라서 2050년의 A 시의 인구는 $100 \times 1.62 = 162$ (만 명)

28. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)로 정의될 때, a_{10} 의 값은?

- ① 18
- ② 19
- ③ 20
- ④ 21
- ⑤ 22

해설

$$na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$$
$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$$b_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$
$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$b_2 = b_1 + \frac{1}{1 \cdot 2}$$
$$b_3 = b_2 + \frac{1}{2 \cdot 1}$$

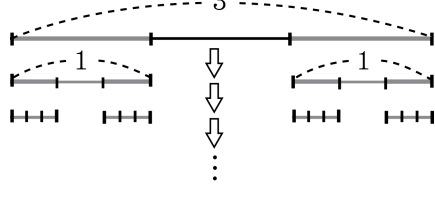
$$\vdots$$
$$+ \left[b_n = b_{n-1} + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right]$$

$$b_n = b_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$
$$b_n = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ 이므로

$$a_n = 2n - 1$$
$$a_{10} = 2 \times 10 - 1 = 19$$

29. 다음 그림과 같이 길이가 3인 실이 있다. 이 실을 3등분하여 자른 후 가운데의 것은 버리고 다시 남은 두 실을 3등분하여 자른 후 가운데 것은 버린다. 이와 같은 시행을 20회 반복하였을 때, 남아있는 실의 길이의 합은?



- ① $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{21}$
 ④ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ⑤ $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

해설

위 과정을 n 회 반복하였을 때, 남아 있는 실의 길이의 합을 a_n 이라고 하면

$$a_1 = 3 \times \frac{2}{3} = 2, \quad a_2 = a_1 \times \frac{2}{3}, \quad a_3 = a_2 \times \frac{2}{3}, \dots \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{따라서 구하는 실의 길이의 합은 } a_{20} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{19}$$

30. $f(x) = [\log_5 x]$ 일 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ 의 값은?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 9

② 12

③ 16

④ 20

⑤ 25

해설

(i) $1 \leq x < 5$ 일 때, $0 \leq \log_5 x < 1$ 이므로 $[\log_5 x] = 0$
따라서 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$
 $= [\log_5 1] + [\log_5 2] + [\log_5 3] + [\log_5 4] = 0$

(ii) $5 \leq x < 20$ 일 때, $1 \leq \log_5 x < 2$ 이므로 $[\log_5 x] = 1$
따라서 $f(5) + f(6) + f(7) + \cdots + f(20)$
 $= [\log_5 5] + [\log_5 6] + [\log_5 7] + \cdots + [\log_5 20]$
 $= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 16$

(i), (ii) 에서 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) = 16$