1. $x > 0$, $x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

2. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$를 $4^{\frac{n}{m}}$으로 나타낼때,$m+n$의 값은? (단,m,n은 서로소인 자연수)

① 21 ② 22 ③ 39 ④ 41 ⑤ 49

해설

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} = \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}}$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^3\sqrt{4}}$$
$$= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18}+\frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}}$$

$\therefore m = 36, n = 13$

$\therefore m + n = 49$

3. $x > y > 0$일 때, $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ ② $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ ③ 1

④ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ ⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

4. $a=5\times729^{x}$일 때, 27^{x}을 a에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$ ② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ ③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$a=5\times729^{x}=5\times(3^{6})^{x}=5\times3^{6x}$

$\frac{a}{5}=3^{6x}=(3^{3x})^{2}$

$\therefore\ 3^{3x}=\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ 27^{x}=3^{3x}=\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

5. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

6. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}(n = 1, 2, 3, \cdots)$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = -115$일 때, 자연수 k의 값은?

① 43 ② 44 ③ 45 ④ 46 ⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$이므로
$a_n = 23 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 26$
$-3k + 26 = -115$에서 $-3 = -141$
$\therefore\ k = 47$

7. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 5)$

$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

8. 다음은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로
$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① $1, \frac{1}{2}$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $2, 2$ ⑤ $3, \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

9. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$이라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.

보기

$\cdot\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$

$\cdot\ 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$이므로 $p + q = -45$

10. $\log_3 2 + \log_3\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\log_3 2 + \log_3\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log_3\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_3\left(1+\frac{1}{80}\right)$$
$$= \log_3 2 + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{81}{80}$$
$$= \log_3\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{81}{80}\right)$$
$$= \log_3 81 = \log_3 3^4$$
$$= 4\log_3 3$$
$$= 4$$

11. $a>0, b>0$ 일 때, $\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ 3

해설

$$\log_4(a+2b)+\log_4\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\log_4\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)$$

이때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}=4$$

따라서, 주어진 식의 최솟값은

$$\log_4(4+4)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

12. $A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$, $B=(\log_{\sqrt{3}} 5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25} 8)$ 일 때, AB의 값은?

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{74}{5}$ ③ $\frac{49}{3}$ ④ 67 ⑤ 75

해설

$A=(\log_3 9)(\log_4 9+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3})$

$=(\log_3 3^3)(\log_4 3^3+\log_{2^{-1}} 3^{-1})$

$=(2\log_3 3^3)(\frac{2}{2}\log_2 3+\frac{-1}{-1}\log_2 3)$

$=2(\log_2 3+\log_2 3)=2\cdot\log_2 3=4\log_2 3$

$B=(\log_{\sqrt{3}} 5+\log_9 5)(\log_5 64+\log_{25} 8)$

$=(\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5+\log_{3^2} 5)(\log_5 2^6+\log_{5^2} 2^3)$

$=(2\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5)(6\log_5 2+\frac{3}{2}\log_5 2)$

$=\frac{5}{2}\log_3 5\cdot\frac{15}{2}\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}\cdot\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 5}$

$=\frac{75}{4}\cdot\frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}=\frac{75}{4}\log_3 2$

$\therefore\ AB=4\log_2 3\cdot\frac{75}{4}\log_3 2$

$=4\cdot\frac{75}{4}\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2=75$

13. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log\sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log\sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log(1.41\times 10^{-1})$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log\sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164 이다.

14. $\log x$의 정수 부분이 4이고, $\log y$의 정수 부분이 2일 때, $\log \sqrt{xy}$의 정수 부분을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log x = 4 + \alpha \ (0 \leq \alpha < 1)$

$\log y = 2 + \beta \ (0 \leq \beta < 1)$

$\log \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log^{x} + \log^{y})$

$= \frac{1}{2}(4 + \alpha + 2 + \beta)$

$= 3 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \beta < 1$이므로

$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < 1$

$\therefore \log^{\sqrt{xy}}$의 정수 부분은 3

15. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$\log_{10} 275 = \log_{10}^{25\times 11} = 2\log_{10}^{5} + \log_{10}^{11}$

$= 2(1 - \log_{10}^{2}) + \log_{10}^{11}$

$= 2(1 - 0.301) + 1.041$

$= 2.439$

소수 셋째 자리에서 반올림하면 2.44

16. 다음 세 조건을 동시에 만족하는 두 자연수 x, y에 대하여 xy는?

㉠ x와 y의 상용로그의 정수 부분은 같다.
㉡ x와 $\frac{1}{y}$의 상용로그의 소수 부분은 같다.
㉢ x^3y^2의 상용로그의 정수 부분은 7이다.

① 10 ② 100 ③ 1000 ④ 2500 ⑤ 8000

해설

㉠ $\log x = n + \alpha$, (단, n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

$\log y = n + \beta (0 \leq \beta < 1)$

㉡ $\log \frac{1}{y} = \log y^{-1} = -\log y$

$= -n - \beta = -n + 1 - 1 - \beta$

$= (-n - 1) + 1 - \beta$

$1 - \beta = \alpha$

$\therefore \ \alpha + \beta = 1$

㉢ $\log x^3y^2 = 3\log x + 2\log y$

$= 3(n + \alpha) + 2(n + \beta)$

$= 5n + 3\alpha + 2\beta$

정수 부분이 7이므로

소수 부분은 $3\alpha + 2\beta - 2, \ n = 1$

$\therefore \log^{xy} = \log x + \log y$

$= n + \alpha + n + \beta$

$= 2n + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$

$\therefore xy = 10^3 = 1000$

17. 다음 <보기> 중 $\log A$와 소수 부분이 항상 같은 것으로 묶어 놓은 것은? (단, 로그는 상용로그)

보기

ㄱ $10\log A$　　ㄴ $10 - \log A$　　ㄷ $\log 10A$

ㄹ $(\log A) - 10$　　ㅁ $\log \dfrac{A}{10}$

① ㄱ, ㄴ, ㄷ　　② ㄴ, ㄷ, ㄹ　　③ ㄷ, ㄹ, ㅁ

④ ㄱ, ㄴ, ㅁ　　⑤ ㄴ, ㄹ, ㅁ

해설

소수 부분이 같으려면
진수의 숫자의 배열이 같아야하므로
ㄷ, ㄹ, ㅁ

18. $\log x$의 정수 부분은 3이고, $\log x$, $\log \sqrt[3]{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. $\log \sqrt{x}$의 정수 부분을 n, 소수 부분을 α라 할 때 $n+8\alpha$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\log x = 3+\beta \ (0 \le \beta < 1)$$

$$\log \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log x = 1+\frac{\beta}{3}$$

$$\therefore \ \beta+\frac{\beta}{3}=1$$

$$\therefore \ \beta=\frac{3}{4}$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}(3+\alpha) = \frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

$$n=2, \ \alpha=\frac{1}{4}$$

$$n+8\alpha = 2+2=4$$

19. 세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $12x$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 28

해설

세 수 $\log 3$, $\log(2^x+1)$, $\log(2^x+7)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log(2^x+1) = \log 3 + \log(2^x+7)$

$\log(2^x+1)^2 = \log 3(2^x+7) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 3(2^x+7)$

$2^x = t$로 치환하면, $(t+1)^2 = 3(t+7) \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0$

$(t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 (\because t > 0)$

$\therefore\ 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \dfrac{\log 5}{\log 2} = \dfrac{1-0.3}{0.3} = \dfrac{7}{3}$

따라서 구하는 값은 $12x = 28$

20. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

I. $a_1 = 3$ II. a_{n+1}은 ${a_n}^2$을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 35 ④ 40 ⑤ 42

해설

$a_1 = 3$

$a_2 = 2$

$a_3 = 4$

$a_4 = 2$

$\vdots$

즉, $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$

21. 3의 세제곱근 중 실수인 것을 a, 9의 세제곱근 중에 실수인 것을 b라 할 때, ab의 값은?

① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $\sqrt[3]{9}$ ⑤ 9

해설

3의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$
이므로 $a = \sqrt[3]{3}$
9의 세제곱근 중에 실수인 것은 $\sqrt[3]{9}$
따라서, 구하는 값은
$ab = \sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

22. 세 수 $A = \sqrt[3]{-3}$, $B = \sqrt[5]{-6}$, $C = \sqrt[15]{-225}$ 에 대하여 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < C < A$

④ $C < A < B$　　⑤ $C < B < A$

해설

$A = \sqrt[3]{-3}$, $B = \sqrt[5]{-6}$, $c = \sqrt[15]{-225}$ 에서

$3, 5, 15$ 의 최소공배수는 15 이므로 각 수를 모두 15 제곱한다.

$$A^{15} = (\sqrt[3]{-3})^{15} = \left\{(\sqrt[3]{-3})^3\right\}^5 = (-3)^5 = -243$$

$$B^{15} = (\sqrt[5]{-6})^{15} = \left\{(\sqrt[5]{-6})^5\right\}^3 = (-6)^3 = -216$$

$$C^{15} = (\sqrt[15]{-225})^{15} = -225$$

이므로 $A^{15} < C^{15} < B^{15}$

$\therefore A < C < B$

23. $a>0$이고 $t=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})$일 때, $(t+\sqrt{t^2+1})^3$을 a에 관한 식으로 나타내면?

① a^2 ② a ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\sqrt{a}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$$t+\sqrt{t^2+1}=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})+\sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})+\sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{2}{3}}-2+a^{-\frac{2}{3}})+1}$$

$$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})+\sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}}+2+a^{-\frac{1}{3}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})+\sqrt{\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})+\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})=a^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ (t+\sqrt{t^2+1})^3=(a^{\frac{1}{3}})^3=a$$

24. 함수 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$인 양수)에 대하여 다음 물음에 답하여라.

a가 $1+\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수인 값이라 할 때, 등식 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = p+q\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$이므로 $a^3 = 1+\sqrt{3}$이다.

$f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{1+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= -3+2\sqrt{3}$$

$\therefore\ p+q = -3+2 = -1$

25. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$라고 할 때, $\log_8 125$를 a, b로 나타내면?

① $1-2b$ ② $2b-a$ ③ $a-b$

④ $\dfrac{b}{a}$ ⑤ $\dfrac{a}{b}$

해설

$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$

$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$

$= \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2} = \dfrac{b}{a}$

26. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 $10^{-12}\mathrm{W/m^2}$와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\mathrm{W/m^2}$를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10\log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

① 10^9배 ② 10^{10}배 ③ 10^{11}배

④ 10^{12}배 ⑤ 10^{13}배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB이므로 이 소리의 세기를 a라 하면

$130 = 120 + 10\log a$

$10 = 10\log a$

$1 = \log a$

$\therefore\ a = 10$

따라서 표준음의 세기의 $\dfrac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$(배)

27. 5년에 한 번씩 시행하는 인구주택총조사 결과 A시의 인구는 5년마다 7% 증가한다고 한다. 2015년의 A시의 인구가 100만 명이었을 때, 2050년의 이 시의 인구는? (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 1.62 = 0.21$로 계산한다.)

① 121만명 ② 145만명 ③ 162만명

④ 178만명 ⑤ 185만명

해설

2050년은 2015년으로부터 35년 후이고 35년은 5년이 7번 지난 것이므로 2050년의 A의 인구는

$100 \times (1 + 0.07)^7 = 100 \times 1.07^7$(만 명)

$\log 1.07^7 = 7 \log 1.07 = 7 \times 0.03 = 0.21$

이때 $\log 1.62 = 0.21$이므로

$1.07^7 = 1.62$

따라서 2050년의 A시의 인구는 $100 \times 1.62 = 162$(만 명)

28. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ na_{n+1} = (n+1)a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의될 때, a_{10}의 값은?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

$na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_1 = \dfrac{a_1}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + \frac{1}{1\cdot 2} \\ b_3 &= b_2 + \frac{1}{2\cdot 1} \\ &\vdots \\ +\ b_n &= b_{n-1} + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \end{aligned}$$

$b_n = b_1 + \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$

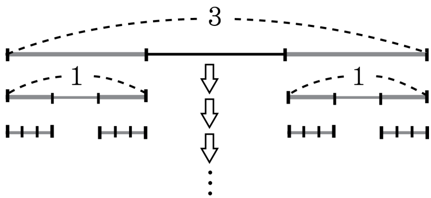
$b_n = 1 + 1 - \dfrac{1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{2n-1}{n}$

$b_n = \dfrac{a_n}{n}$이므로

$a_n = 2n - 1$

$a_{10} = 2 \times 10 - 1 = 19$

29. 다음 그림과 같이 길이가 3인 실이 있다. 이 실을 3등분하여 자른 후 가운데의 것은 버리고 다시 남은 두 실을 3등분하여 자른 후 가운데 것은 버린다. 이와 같은 시행을 20회 반복하였을 때, 남아있는 실의 길이의 합은?



① $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{21}$

④ $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ⑤ $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

해설

위 과정을 n회 반복하였을 때, 남아 있는 실의 길이의 합을 a_n이라고 하면

$a_1 = 3\times\frac{2}{3} = 2,\ a_2 = a_1\times\frac{2}{3},\ a_3 = a_2\times\frac{2}{3},\cdots$ 이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ a_n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 실의 길이의 합은 $a_{20} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$

30. $f(x) = [\log_5 x]$일 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 9 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 25

해설

(i) $1 \le x < 5$일 때, $0 \le \log_5 x < 1$이므로 $[\log_5 x] = 0$

따라서 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$

$= [\log_5 1] + [\log_5 2] + [\log_5 3] + [\log_5 4] = 0$

(ii) $5 \le x < 20$일 때, $1 \le \log_5 x < 20$이므로 $[\log_5 x] = 1$

따라서 $f(5) + f(6) + f(7) + \cdots + f(20)$

$= [\log_5 5] + [\log_5 6] + [\log_5 7] + \cdots + [\log_5 20]$

$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 16$

(i), (ii)에서 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) = 16$