1. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로

분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore \ x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

2. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

3. 두 점 $A(1), B(5)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P와 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3\times5+1\times1}{3+1}=4$$

$\therefore\ P(4)$

$$\frac{3\times5-1\times1}{3-1}=7$$

$\therefore\ Q(7)$

$\therefore\ \overline{PQ}=|7-4|=3$

4. 두 다항식 $A = x^2 - x - 2$, $B = x^2 - 5x + 6$에 대하여 다음 설명 중 옳은 것은?

① 두 다항식의 최대공약수는 $x - 1$이다.

② 두 다항식의 최소공배수는 $x^3 - 4x^2 - 3x + 6$이다.

③ 두 다항식의 합은 최대공약수와 같다.

④ 두 다항식의 차는 최소공배수와 같다.

⑤ 두 다항식의 곱은 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같다.

해설

$A = (x-2)(x+1)$, $B = (x-2)(x-3)$

최대공약수 : $x - 2$

최소공배수 : $(x-2)(x+1)(x-3)$

$\therefore$(두 다항식의 곱) = (최대공약수)×(최소공배수) $= (x-2)^2(x+1)(x-3)$

5. 점 $(1,3)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1,3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1}=3$

6. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

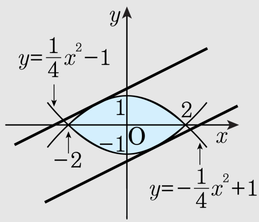
$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4,$
$\therefore a=2 \quad (\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

7. 연립부등식 $\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{4}x^2 - 1 \\ y \leq -\dfrac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $y - \dfrac{1}{2}x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{2}$　　② 2　　③ $\dfrac{3}{2}$　　④ 1　　⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

주어진 연립부등식의 영역은 그림에서 색칠한 부분이다.



여기서 $y = -\dfrac{1}{2}x = k$ 라 하면,

k 가 최대, 최소로 되는 것은 그림과 같이 곡선에 접할 때이다.

따라서 $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 1$ 과 $y = \dfrac{1}{2}x + k$ 가 접할 때,

$\dfrac{1}{2}x + k = -\dfrac{1}{4}x^2 + 1$

$x^2 + 2x + 4(k - 1) = 0$

$D/4 = 1 - 4(k - 1) = 0$

$\therefore\ k = \dfrac{5}{4}$

$\therefore$ 최댓값은 $M = \dfrac{5}{4}$

또한, $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ 과 $y = \dfrac{1}{2}x + k$ 가 접할 때,

같은 방법으로 최솟값을 구하면 $m = -\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ M - m = \dfrac{5}{4} - \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{5}{2}$

8. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

9. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

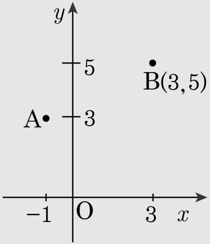
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



10. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수 z는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다. ② 한 개 있다.

③ 두 개뿐이다. ④ 무수히 많이 있다.

⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면,

$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 에서

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore$ $2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 a, b 의 쌍은 무수히 많다.