

1. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

$$\text{순허수이므로 } 2a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(2a-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$$a^2 + 4a + 4 = 0 \text{이 되어 순허수가 성립되지 않는다.}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

2. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
 $x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$
 $m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$
 $\therefore m < 1, m > 5$

3. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

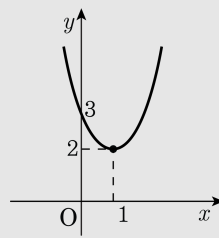
$$a^2 + b^2 = 5$$

4. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x 의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의
함숫값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과
같다.
 $f(0) = 3, f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위는 $2 < y < 3$



5. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

2		1	-1	1	-6
			2	2	6
		1	1	3	0

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은 $(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$$\therefore x = 2, x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

두 허근의 합은 -1

6. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $y = 2$

▷ 정답 : $z = 3$

해설

① + ②에서 $3x + 2y = 7 \cdots\cdots\cdots ④$
① + ③에서 $2x + 3y = 8 \cdots\cdots\cdots ⑤$
④, ⑤를 연립하여 풀면 $x = 1, y = 2$
이 값을 ①에 대입하면 $z = 3$
 $\therefore x = 1, y = 2, z = 3$

7. 길이가 3인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

길이가 3인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A는 A(3)
이 선분을 2:1로 내분하는 점을 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1} = 2$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2 - 1} = 6$$

따라서 $\overline{PQ} = 6 - 2 = 4$

8. 두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점을 지나고 $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax + by = 0$ 이라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x - y - 3) + k(x + y - 3) = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(-3) + k(-3) = 0 \quad \therefore k = -1$$

$(2x - y - 3) + (-1)(x + y - 3) = 0$ 을 정리하면

$$\therefore x - 2y = 0$$

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore a - b = 1 - (-2) = 3$$

9. 방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2, -3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$

② 3, 7, 5

③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$

⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2, -3)$ 이고 반지름의 길이가

r 인 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - r^2 = 0$$

이것이 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 과 일치해야 하므로

$$A = 4, B = 6, 13 - r^2 = 0$$

$$13 - r^2 = 0 \text{ 에서}$$

$$r = \sqrt{13} \quad (\because r > 0)$$

따라서, $A = 4, B = 6$ 이고

반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

10. 직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x + 4y - 5 = 0$ 를
 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
 $3(x - 2) + 4(y + 3) - 5 = 0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x + 4y + 1 = 0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

11. 임의의 실수 x 에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 성립할 때, $a(b+c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
양변에 $x=2, -2, 1$ 을 각각 대입하면
 $0 = 1 + a + b + c, 0 = -27 + 9a - 3b + c, -9 = c$
세 식을 연립하여 풀면 $a=5, b=3, c=-9$
 $\therefore a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$$\begin{aligned} & (x-2)(x+2)^2 \\ &= x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ &= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c \\ &= (x-1)[(x-1)((x-1) + a) + b] + c \end{aligned}$$

1		1	2	-4	-8	
			1	3	-1	
1		1	3	-1	-9	← c
			1	4		
1		1	4	3		← b
			1			
		1	5			← a

$$\therefore a(b+c) = 5(3-9) = -30$$

12. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$
위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
 $\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

13. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}$$

- ① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
 ④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & a & b & 1 & \\ & & -1 & -a + 1 & -b + a - 1 & \\ \hline & 1 & a - 1 & b - a + 1 & -b + a & \end{array}$$

이때 $k = -1$, $c = -1$, $d = -a + 1$, $b - a + 1 = -1$, $-b + a = 2$ 이므로

$k = -1$, $c = -1$, $a = 4$, $b = 2$, $d = -3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

14. 두 다항식 $x^2 + 3x + a$, $x^2 - 3x + b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 최소 공배수를 구하여라.

① $x^3 + 3x^2 - 12x + 8$

② $x^3 - 3x^2 + 10x - 8$

③ $x^3 + x^2 - 10x + 8$

④ $x^3 - 9x + 8$

⑤ $x^3 + 2x^2 - 8x + 10$

해설

최대공약수는 두 식의 인수이므로 인수정리를 이용하여 a , b 를 구한다.

$$1 + 3 + a = 0 \quad 1 - 3 + b = 0 \text{에서 } a = -4 \quad b = 2$$

$$\therefore x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

그러므로 두 다항식의 최소공배수는

$$(x - 1)(x - 2)(x + 4) = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

15. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α 라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$ 이므로

$$\alpha + \alpha + 2 = \frac{2k}{9} \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{k - 5}{9} \dots\dots\textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}\text{에서 } \alpha = \frac{k}{9} - 1,$$

이것을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$k^2 - 9k - 36 = 0, (k - 12)(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 12, -3$$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2 \text{에서}$$

$$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore k = 12, -3$$

16. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

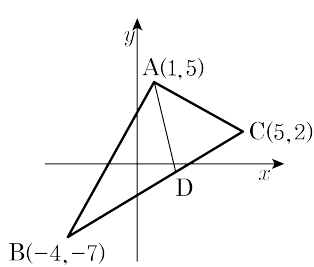
▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

17. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(-4, -7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$
 ③ $(2, -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$
 ⑤ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$$

$$\therefore D\left(\frac{-20+65}{13+5}, \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

18. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

19. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$
 $\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

20. 직선 $kx - y + 3k = 1$ 은 k 값에 관계없이 항상 일정한 점 A를 지난다.
이 점 A의 좌표는?

- ① A(-3, -1) ② A(-2, -1) ③ A(-1, -1)
④ A(1, -1) ⑤ A(2, 1)

해설

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면
 $(x + 3)k - (y + 1) = 0$
위 식은 k 값에 관계없이
 $x + 3 = 0$, $y + 1 = 0$ 의 교점을 지난다.
 $\therefore x = -3$, $y = -1$
 $\therefore A(-3, -1)$

21. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

22. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 개의 접선의 기울기를 합하면?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{5}{2}$

③ 0

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면

$$y = m(x - 3) - 1 = mx - 3m - 1$$

원 중심에서 접선까지 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$(-3m - 1)^2 = 5m^2 + 5$$

$$4m^2 + 6m - 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$m = -2, \frac{1}{2}$$

23. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y = x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b, 1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(-1, 2)$ 을 원점대칭이동 $\rightarrow (1, -2)$
 x 축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\rightarrow (1+a, -2)$
 x 축에 대해 대칭이동 $\rightarrow (1+a, 2)$
 $y = x$ 에 대해 대칭이동 $\rightarrow (2, 1+a)$
따라서 $b = 2, 1+a = 1, a = 0$ 이므로 $a + b = 2$

24. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x' + y'$ 을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$y = x + 2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
 $x' = y - 2$ $y' = x + 2$, $(x, y) = (3, 4)$ 이므로
 $x' = 2$ $y' = 5$, $\therefore x' + y' = 7$

25. 점 $(a, 5)$ 가 곡선 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 의 위 또는 윗부분에 있을 때, 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점 $(a, 5)$ 가 부등식 $y \geq 2x^2 - 2x + 1$ 이 나타내는 영역에 포함되어야 한다.

$$5 \geq 2a^2 - 2a + 1, 2a^2 - 2a - 4 \leq 0$$

$$a^2 - a - 2 \leq 0, (a + 1)(a - 2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 2$$

a 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.

$$\therefore 2 + (-1) = 1$$

26. $x^2 + y^2 \leq r$ 가 나타내는 영역이 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 가 나타내는 영역에 포함된다고 할 때, 양수 r 의 최솟값을 구하여라.

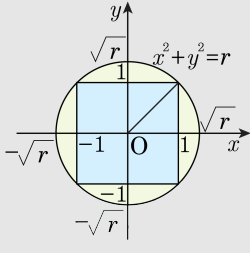
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

집합 $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 에서
 $A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ 이고,
집합 B 가 나타내는 영역은 원 $x^2 + y^2 = r$ 의 내부(경계포함)
이다.

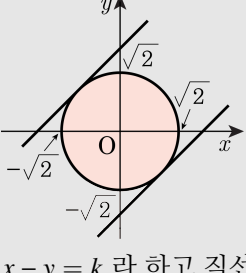
조건을 만족하려면 오른쪽 그림에서
원의 반지름의 길이 $\sqrt{r}$ 가 $\sqrt{2}$ 보다
크거나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{r} \geq \sqrt{2}$
 $\therefore r \geq 2$
따라서, r 의 최솟값은 2이다.



27. 두 미지수 x, y 가 부등식 $x^2 + y^2 \leq 2$ 를 만족시킬 때, $x - y$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 0
- ⑤ 1

해설



$x - y = k$ 라 하고 직선을 움직여보면
직선 $x - y = k$ 가 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 접할 때,
 k 는 최댓값과 최솟값을 갖는다.
 $(y + k)^2 + y^2 = 2$ 에서 $y^2 + 2ky + k^2 + y^2 = 2$
방정식 $2y^2 + 2ky + k^2 - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4} =$
 $k^2 - 2(k^2 - 2) = 0$
 $k^2 = 4 \quad \therefore k = \pm 2$
따라서 $x - y$ 의 최댓값은 2
최솟값은 -2이므로 구하는 값은
 $2 + (-2) = 0$ 이다.

28. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$ 가 이차식의 완전제곱이 되도록 a 의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

$$(\text{준식}) = (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) + a$$

여기서, $x^2 - 8x + 7 = X$ 로 놓으면

$$(\text{준식}) = X(X + 8) + a$$

$$= X^2 + 8X + a = (X + 4)^2 + a - 16$$

따라서 $a = 16$

29. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지는 $2x + 1$ 이고, $g(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지는 $x - 4$ 이다. 이 때, $(x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 을 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x) = (x^2 - 4)p(x) + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 5$
 $g(x) = (x^2 - 5x + 6)q(x) + x - 4$ 에서 $g(3) = -1$
 $h(x) = (x + 2)f(x) + 3g(x + 1)$ 이라 놓으면,
 $h(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는
 $h(2) = 4f(2) + 3g(3) = 17$

30. 두 다항식 $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3, g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$ 의 최대공약수 $G(x)$ 가 x 의 이차식일 때, ab 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$$

$$g(x) = x^3 - x^2 + bx + 3$$

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + (a - b)x - 6$$

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + (a + b)x$$

$$= x\{2x^2 + (a + b)\}$$

$G(x)$ 는 $f(x) - g(x), f(x) + g(x)$ 의 공약수이다.

$$\therefore 2x^2 + (a - b)x - 6 = 2x^2 + (a + b)$$

$$a - b = 0, \quad a + b = -6$$

$$\therefore a = -3, b = -3, ab = 9$$

31. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$$

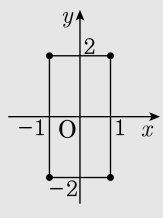
복소수의 상등에 의하여

$$|x|+|y|=3, 3|x|-4|y|=-5$$

두 식을 연립하면

$$|x|=1, |y|=2$$

$$(x, y) \rightarrow (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$



$$\therefore \text{직사각형의 넓이} = 2 \times 4 = 8$$

32. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.
 $z = a + bi$ 라면
 $1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a) + (1+b)i$
이것이 순허수이므로 $1+a = 0, a = -1$
 $\therefore z = -1 + bi$
또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$
 $1 - 2bi - b^2 = c + 4i$
 $\therefore -2b = 4, 1 - b^2 = c$
 $\therefore b = -2, c = -3$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 14$

33. $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$ 의 값을 구하면?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 13

해설

α, β 가 $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + (p-3)\alpha + 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$\beta^2 + (p-3)\beta + 1 = 0 \dots\dots ②$$

$$①\text{에서 } 1 + p\alpha + \alpha^2 = 3\alpha$$

$$②\text{에서 } 1 + p\beta + \beta^2 = 3\beta$$

$$\therefore (1 + p\alpha + \alpha^2)(1 + p\beta + \beta^2)$$

$$= 3\alpha \cdot 3\beta$$

$$= 9\alpha\beta$$

$$= 9 (\because \alpha\beta = 1)$$

34. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{1}{\beta}$ ② $\frac{2}{\beta}$ ③ β ④ 2β ⑤ β^2

해설

$$\begin{aligned}\beta^2 - \beta + 1 &= 0 \\ \alpha\beta &= 1 \text{ 에서 } \beta = \frac{1}{\alpha}, \\ \beta^2 &= \frac{1}{\alpha^2} \\ 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} &= 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta \\ (\because \beta^2 + 1 &= \beta)\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}(\text{별해1}) \\ 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} &= \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \quad (\because \alpha^2 - \alpha + 1 = 0) \\ \alpha\beta &= 1 \text{ 에서 } \beta = \frac{1}{\alpha} \\ \therefore \frac{2}{\alpha} &= 2\beta \\ (\text{별해2}) \\ x^2 - x + 1 &= 0 \text{ 의 근은 } \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ \alpha &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 라 하면} \\ \frac{2}{\alpha} &= \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta\end{aligned}$$

35. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$ 의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m 의 범위를 정하면?
- ① $-2 < m < 3$ ② $2 \leq m < 3$ ③ $-1 < m < 3$
④ $1 < m \leq 3$ ⑤ $3 < m \leq 4$

해설

두 근을 α, β 라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \geq 0$
 $m^2 - m - 2 \geq 0, (m-2)(m+1) \geq 0$
 $\therefore m \leq -1, m \geq 2$

(ii) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore m > 1$

(iii) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore m < 3$
 $\therefore$ (i), (ii), (iii)의 공통범위는 $2 \leq m < 3$

36. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.
1kg에 p 원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p 의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

- ① 2600 원
 ② 2670 원
 ③ 2700 원
- ④ 2750 원
 ⑤ 2800 원

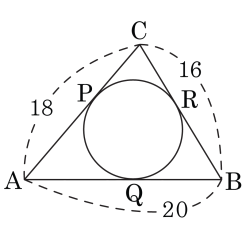
해설

3000원에서 10x원 가격을 내렸을 때
 1kg의 판매가격은 $3000 - 10x$
 1일 판매량은 $100 + 3x$
 따라서 하루의 이익 P 는

$$\begin{aligned}
 P &= (3000 - 10x)(100 + 3x) - 2000(100 + 3x) \\
 &= (1000 - 10x)(100 + 3x) \\
 &= -30x^2 + 2000x + 100000 \\
 &= -30\left(x^2 - \frac{200}{3}x\right) + 100000 \\
 &= -30\left(x - \frac{100}{3}\right)^2 + \frac{400000}{3}
 \end{aligned}$$

 x 가 문제에서 정수이므로 $x = 33$ 일 때 최대이다.
 따라서 $3000 - 330 = 2670$ (원)

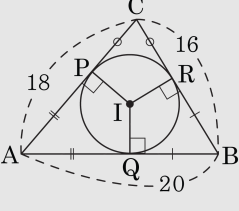
37. 아래 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 16, 18, 20인 삼각형에 원이 내접하고 있다. 접점 P, Q, R은 각각 점 A로부터 a , 점 B로부터 b , 점 C로부터 c 만큼 떨어져 있다. 다음 중 옳은 것은?



- ① $a = 10, b = 9, c = 7$
 ② $a = 10, b = 9, c = 8$
- ③ $a = 11, b = 10, c = 6$
 ④ $a = 11, b = 9, c = 7$
- ⑤ $a = 12, b = 9, c = 6$

해설

다음 그림에서 I는 $\triangle ABC$ 의 내심이므로



$\overline{AP} = a, \overline{QB} = b, \overline{RC} = c$ 라 할 때
 $\overline{AP} = \overline{AQ}$ 에서 $a = 20 - b \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{CP} = \overline{CR}$ 에서 $c = 18 - a \cdots \textcircled{2}$
 $\overline{BR} = \overline{BQ}$ 에서 $b = 16 - c \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 세 식을 모두 더해주면
 $a + b + c = 54 - (a + b + c)$
 $\therefore a + b + c = 27$
 $\therefore a = 11, b = 9, c = 7$

38. x, y 에 대한 연립방정식
$$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\frac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\frac{3}{4}$
 ④ $a \leq \frac{2}{3}$

② $a > -\frac{1}{2}$
 ⑤ $a < 2$

③ $-1 < a < 1$

해설

$$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\frac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 -$

$$(a+2)t + \frac{a^2+1}{4} = 0$$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$$D = (a+2)^2 - 4 \times \frac{a^2+1}{4} \geq 0$$

$$4a+3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{4}$$

39. 대학수학능력시험 수리탐구 영역 (I) 의 문항 수는 30 개이고 배점은 40 점이다. 문항별 배점은 1 점, 1.5 점, 2 점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

1 점짜리 문항을 x 개,
1.5 점짜리 문항을 y 개,
2 점짜리 문항을 z 개라고 하면
 $x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \textcircled{1}$
 $x + y + z = 30 \cdots \textcircled{2}$
($x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$) 라고 하면
 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \times 3 = -x + z = -10,$
 $x = z + 10, z \geq 1$ 이므로
 $x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로
 x 의 최솟값은 11

40. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3 ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로
 $|x| = t$ ($t \geq 0$) 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

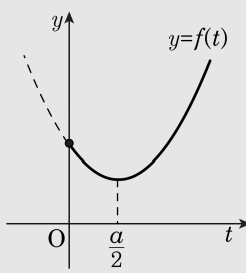
$$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0, \quad a^2 - 8 \leq 0$$

$$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

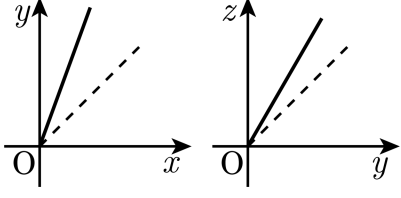
그런데 $a > 0$ 이므로

$$0 < a \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

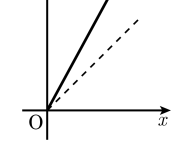


41. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y, y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

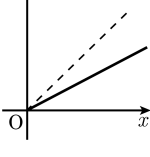


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

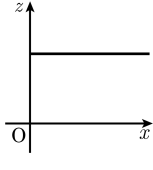
①



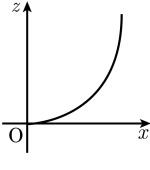
②



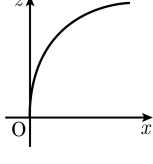
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1), z = by(b > 1)$
 $\therefore z = b(ax) = abx \ (ab > 1)$
 따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

42. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

43. n 이 양의 정수일 때, $8^{100n} - 1$ 을 9로 나눈 나머지는?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$8 = x$ 라 하면 $8^{100n} - 1 = x^{100n} - 1$ 이고 $9 = x + 1$ 이 된다.
 $x^{100n} - 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면
 $x^{100n} - 1 = (x + 1)Q(x) + R$
양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $R = 0$
 $\therefore x^{100n} - 1 = (x + 1)Q(x)$
위의 식에 $x = 8$ 을 대입하면 $8^{100n} - 1 = 9Q(x)$ 이므로 $8^{100n} - 1$ 을 9로 나눈 나머지는 0이다.

44. 복소수 z 가 $z^2 = \bar{z}$ 일 때, z 이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)
- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면

$$(a + bi)^2 = a - bi$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

$$a^2 - b^2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2ab = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

$$(i) \ b = 0 \text{ 일 때 } \textcircled{1} \text{에서 } a^2 = a$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

$$(ii) \ a = -\frac{1}{2} \text{ 일 때 } \textcircled{1} \text{에서 } \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서, } z = 0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

45. $x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

- ① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 6

해설

$$x^2 + kyx - (2y^2 - 3y + 1) = 0 \text{에서}$$

$$D = k^2y^2 + 4(2y^2 - 3y + 1)$$

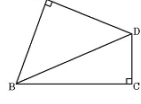
$$= (k^2 + 8)y^2 - 12y + 4$$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 36 - 4(k^2 + 8) = 0$$

$$\therefore k = \pm 1$$

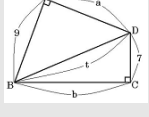
46. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB} = 9$, $\overline{CD} = 7$, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ 인 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t 라 할 때, t^2 의 값을 구하면?



- ① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{BD} = t$ 라 할 때,



$$9^2 + a^2 = 7^2 + b^2, \quad b^2 - a^2 = 32$$

(자연수이므로, $b > a$)

$$(b - a)(b + a) = 32 \Rightarrow \text{부정방정식}$$

$b > a$ 이므로

$b - a$, $b + a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$$1 \times 32 = 32, \quad 2 \times 16 = 32, \quad 4 \times 8 = 32, \dots$$

$b - a = 4$, $b + a = 8$ 일 때 조건이 성립하므로,

$a = 2$, $b = 6$ 이다.

$b + a = 16$, $b - a = 2$ 일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$$\therefore t^2 = 9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$$

47. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x 축, y 축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

- ① $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ③ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
④ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ⑤ $x^2 + 3y^2 = 6$

해설

A(a , 0), B(0, b), P(x , y)라 하면

$\overline{AB} = 3$ 이므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

$a^2 + b^2 = 9 \cdots \textcircled{1}$

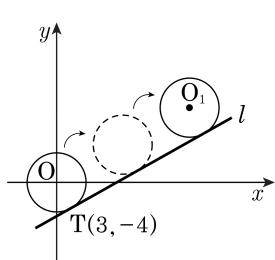
P(x , y)는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{2b}{3}$

$\therefore a = 3x$, $b = \frac{3y}{2} \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$

$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

48. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore$ (직선 OO_1 의 기울기)

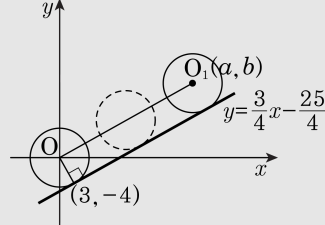
$=$ (직선 l 의 기울기)

$= \frac{3}{4}$

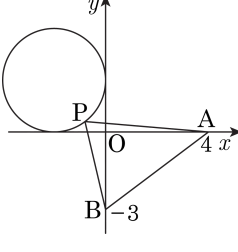
직선 l 의 방정식은 $y - (-4) =$

$\frac{3}{4}(x - 3)$

$\therefore y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$



49. 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위를 움직이는 점 P 와 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, -3)$ 으로 이루어지는 $\triangle ABP$ 의 넓이의 최솟값과 최댓값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 구하시오.

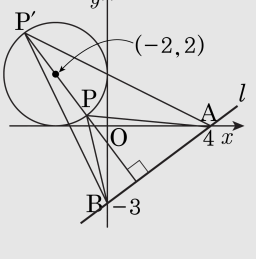


▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원 위의 한 점 P' 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선 직선 l 에 이르는 거리가 최대일 때 $\triangle ABP'$ 의 높이는 최대가 되고 넓이도 최대이다. 마찬가지로 원 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선



직선 l 에 이르는 거리가 최소일 때 $\triangle ABP$ 의 높이는 최소가 되고 넓이도 최소이다. 원의 중심 $(-2, 2)$ 에서 A, B 를 지나는 직선

$l: 3x-4y-12=0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|-6-8-12|}{5} = \frac{26}{5}$$

$d+r$ 일 때 최대거리, $d-r$ 일 때 최소거리

$$\begin{cases} M = \left(\frac{26}{5} + 2\right) \times \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 18 \quad (\because \overline{AB} = 5) \\ m = \left(\frac{26}{5} - 2\right) \times \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\therefore M+m=26$$

50. 원 $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?
- ① $\pi + 1$ ② $\pi + 2$ ③ $3\pi + 1$
④ $3\pi + 2$ ⑤ $3\pi + 4$

해설

(구하는 넓이)

$$= \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right\} \times 2$$
$$= 3\pi + 2$$