1. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow \ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=2$ 이면,

$a^2+4a+4=0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

2. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

3. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

4. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

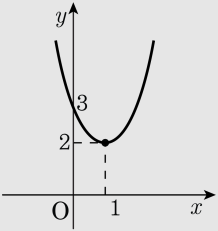
① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$

④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로

함숫값의 범위은 $2 < y < 3$

5. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$$\therefore x = 2 \text{ , } x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

두 허근의 합은 -1

6. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $y=2$

▷ 정답 : $z=3$

해설

① + ② 에서 $3x+2y=7$ $\cdots\cdots$ ④
① + ③ 에서 $2x+3y=8$ $\cdots\cdots$ ⑤
④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$
이 값을 ① 에 대입하면 $z=3$
$\therefore\ x=1,\ y=2,\ z=3$

7. 길이가 3 인 선분을 같은 방향으로 $2:1$ 로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

길이가 3 인 선분을 OA 라 하고,
O 를 원점으로 잡으면 A 는 A(3)
이 선분을 $2:1$ 로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x_1)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{2\times3+1\times0}{2+1} = 2$$

$2:1$ 로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x_2)$ 라 하면

$$x_2 = \frac{2\times3-1\times0}{2-1} = 6$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 6-2 = 4$

8. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$ 의 교점을 지나고 $(0,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by=0$ 이라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x-y-3)+k(x+y-3)=0$으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0,\ 0)$을 지나므로

$(-3)+k(-3)=0 \quad \therefore\ k=-1$

$(2x-y-3)+(-1)(x+y-3)=0$을 정리하면

$\therefore\ x-2y=0$

$a=1,\ b=-2 \quad \therefore\ a-b=1-(-2)=3$

9. 방정식 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 이 나타내는 원의 중심이 $(-2,-3)$ 일 때, 상수 A, B 의 값과 반지름의 길이를 바르게 나열한 것은?

① 2, 3, $\sqrt{2}$　② 3, 7, 5　③ 4, 4, $\sqrt{9}$

④ 4, 6, $\sqrt{13}$　⑤ 5, 9, 11

해설

중심이 $(-2,-3)$ 이고 반지름의 길이가
r 인 원의 방정식은
$(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$
$x^2+y^2+4x+6y+13-r^2=0$
이것이 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 과 일치해야 하므로
$A=4, B=6, 13-r^2=0$
$13-r^2=0$ 에서
$r=\sqrt{13}\ (\because r>0)$
따라서, $A=4, B=6$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

10. 직선 $3x+4y-5=0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x+4y-5=0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2)+4(y+3)-5=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x+4y+1=0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

11. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

양변에 $x=2,-2,1$을 각각 대입하면

$0=1+a+b+c,\ 0=-27+9a-3b+c,\ -9=c$

세 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3,\ c=-9$

$\therefore\ a(b+c)=5\times(3-9)=-30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$(x-2)(x+2)^2$

$=x^3+2x^2-4x-8$

$=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & & \\
 & & 1 & 3 & -1 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow & c \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & b & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow a & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a(b+c)=5(3-9)=-30$

12. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$

위의 식에 $x=1$을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

13. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & b & 1 \\
 & & c & d & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=-1$

④ $d=-3$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
-1 & 1 & a & b & 1 \\
 & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\
\hline
 & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a}
\end{array}
$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

14. 두 다항식 x^2+3x+a, x^2-3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 최소공배수를 구하여라.

① $x^3+3x^2-12x+8$

② $x^3-3x^2+10x-8$

③ $x^3+x^2-10x+8$

④ x^3-9x+8

⑤ $x^3+2x^2-8x+10$

해설

최대공약수는 두 식의 인수이므로 인수정리를 이용하여 a, b를 구한다.

$1+3+a=0$ $1-3+b=0$에서 $a=-4$ $b=2$

$\therefore$ $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

그러므로 두 다항식의 최소공배수는

$(x-1)(x-2)(x+4)=x^3+x^2-10x+8$

15. 이차방정식 $9x^2-2kx+k-5=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha+2$이므로

$$\alpha+\alpha+2=\frac{2k}{9} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2)=\frac{k-5}{9} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{9}-1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$\therefore\ k=12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\frac{\sqrt{(2k)^2-4\cdot 9(k-5)}}{|9|}=2$에서

$\sqrt{4k^2-36(k-5)}=18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2-9k-36=0 \therefore\ k=12,\ -3$

16. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ______ m

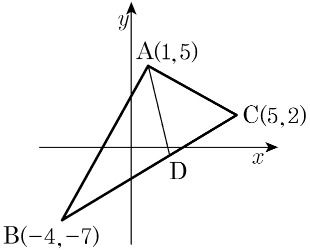
▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore \ a = 30(\mathrm{m})$

17. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(−4, −7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$
③ $(2,\ -1)$　④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$
⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2+(5+7)^2} = 13$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$

$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

18. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2)-3 = \frac{1}{2}x-4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

19. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로

직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

20. 직선 $kx-y+3k=1$는 k값에 관계없이 항상 일정한 점 A를 지난다. 이 정점 A의 좌표는?

① A$(-3,-1)$ ② A$(-2,-1)$ ③ A$(-1,-1)$

④ A$(1,-1)$ ⑤ A$(2,1)$

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3)k-(y+1)=0$

위 식은 k값에 관계없이

$x+3=0,\ y+1=0$의 교점을 지난다.

$\therefore\ x=-3,\ y=-1$

$\therefore$ A$(-3,\ -1)$

21. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2+2ax-2ay+8a-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2+(y-a)^2 &= 2a^2-8a+15\\ &= 2(a-2)^2+7\\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a=2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a)=(-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

22. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 개의 접선의 기울기를 합하면?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{5}{2}$　③ 0　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$(3,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면

$y = m(x-3)-1 = mx-3m-1$

원 중심에서 접선까지 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$$

$(-3m-1)^2 = 5m^2+5$

$4m^2+6m-4=0$

$2m^2+3m-2=0$

$m = -2,\ \frac{1}{2}$

23. 점 $(-1,2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y=x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b,1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(-1,\ 2)$ 을 원점대칭이동 $\rightarrow (1,\ -2)$
x축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\rightarrow (1+a,\ -2)$
x 축에 대해 대칭이동 $\rightarrow (1+a,\ 2)$
$y=x$ 에 대해 대칭이동 $\rightarrow (2,\ 1+a)$
따라서 $b=2,\ 1+a=1,\ a=0$ 이므로 $a+b=2$

24. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x'+y'$ 을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x+2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
$x'=y-2$ $y'=x+2$, $(x, y)=(3, 4)$ 이므로
$x'=2$ $y'=5$, $\therefore$ $x'+y'=7$

25. 점 $(a,\ 5)$ 가 곡선 $y=2x^2-2x+1$ 의 위 또는 윗부분에 있을 때, 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점$(a,\ 5)$ 가 부등식 $y \geq 2x^2-2x+1$ 이 나타내는 영역에 포함되어야 한다.

$5 \geq 2a^2-2a+1,\ 2a^2-2a-4 \leq 0$

$a^2-a-2 \leq 0,\ (a+1)(a-2) \leq 0$

$\therefore\ -1 \leq a \leq 2$

a의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.

$\therefore\ 2+(-1)=1$

26. $x^2+y^2 \le r$가 나타내는 영역이 $|x| \le 1, |y| \le 1$가 나타내는 영역에 포함된다고 할 때, 양수 r 의 최솟값을 구하여라.

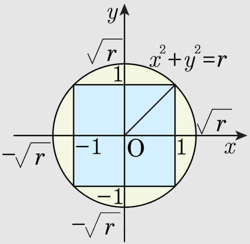
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

집합 $A = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 에서
$A = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ 이고,
집합 B 가 나타내는 영역은 원 $x^2+y^2=r$ 의 내부(경계포함)이다.

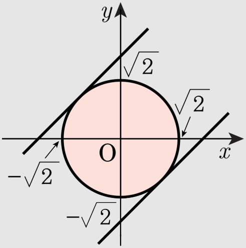
조건을 만족하려면 오른쪽 그림에서 원의 반지름의 길이 $\sqrt{r}$ 가 $\sqrt{2}$ 보다 크거나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{r} \ge \sqrt{2}$
$\therefore r \ge 2$
따라서, r 의 최솟값은 2 이다.



27. 두 미지수 x, y 가 부등식 $x^2+y^2 \le 2$ 를 만족시킬 때, $x-y$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설



$x-y=k$ 라 하고 직선을 움직여보면

직선 $x-y=k$ 가 원 $x^2+y^2=2$ 에 접할 때,

k 는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$(y+k)^2+y^2=2$ 에서 $y^2+2ky+k^2+y^2=2$

방정식 $2y^2+2ky+k^2-2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4}=$

$k^2-2(k^2-2)=0$

$k^2=4$　　$\therefore k=\pm 2$

따라서 $x-y$ 의 최댓값은 2

최솟값은 -2 이므로 구하는 값은

$2+(-2)=0$ 이다.

28. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
(준식) $= X(X+8)+a$
$= X^2+8X+a = (X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

29. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

30. 두 다항식 $f(x)=x^3+x^2+ax-3$,$g(x)=x^3-x^2+bx+3$ 의 최대공약수 $G(x)$가 x의 이차식일 때, ab를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x)=x^3+x^2+ax-3$

$g(x)=x^3-x^2+bx+3$

$f(x)-g(x)=2x^2+(a-b)x-6$

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= 2x^3+(a+b)x \\ &= x\{2x^2+(a+b)\} \end{aligned}$$

$G(x)$ 는 $f(x)-g(x), f(x)+g(x)$ 의 공약수이다.

$\therefore\ 2x^2+(a-b)x-6=2x^2+(a+b)$

$a-b=0,\ a+b=-6$

$\therefore\ a=-3, b=-3$, $ab=9$

31. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

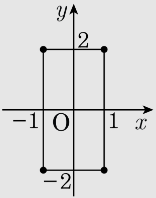
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times4=8$

32. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$라면

$1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a)+(1+b)i$

이것이 순허수이므로 $1+a=0$, $a=-1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c+4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

33. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 13

해설

$\alpha,\ \beta$가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①

$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②

①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$

②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$

$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$

$=3\alpha\cdot 3\beta$

$=9\alpha\beta$

$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

34. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$ ② $\frac{2}{\beta}$ ③ β ④ 2β ⑤ β^2

해설

$\beta^2 - \beta + 1 = 0$

$\alpha\beta = 1$에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$,

$\beta^2 = \frac{1}{\alpha^2}$

$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta$

$(\because \ \beta^2 + 1 = \beta \ )$

해설

(별해1)

$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \ (\because \ \alpha^2 - \alpha + 1 = 0)$

$\alpha\beta = 1$에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$

$\therefore \ \frac{2}{\alpha} = 2\beta$

(별해2)

$x^2 - x + 1 = 0$의 근은 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \ \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta$

35. 방정식 $x^2+2(m-1)x-m+3=0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2<m<3$ ② $2\le m<3$ ③ $-1<m<3$

④ $1<m\le 3$ ⑤ $3<m\le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4}=(m-1)^2+m-3\ge 0$

$m^2-m-2\ge 0$, $(m-2)(m+1)\ge 0$

$\therefore\ m\le -1,\ m\ge 2$

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0 \quad \therefore\ m>1$

(iii) $\alpha\beta=-m+3>0 \quad \therefore\ m<3$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)의 공통범위는 $2\le m<3$

36. 구입 가격이 1kg 에 2000 원인 돼지고기를 1kg 에 3000 원씩 판매하면 하루에 100kg 을 팔 수 있으며 1kg 에 10 원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg 씩 증가하고 1kg 에 10 원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg 씩 감소한다고 한다.
1kg 에 p 원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p 의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10 원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

① 2600 원　② 2670 원　③ 2700 원
④ 2750 원　⑤ 2800 원

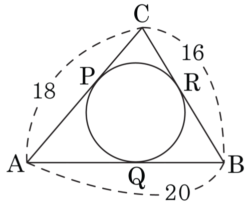
해설

3000 원에서 $10x$ 원 가격을 내렸을 때
1kg 의 판매가격은 $3000-10x$
1 일 판매량은 $100+3x$
따라서 하루의 이익 P 는

$$\begin{aligned} P &= (3000-10x)(100+3x)-2000(100+3x) \\ &= (1000-10x)(100+3x) \\ &= -30x^2+2000x+100000 \\ &= -30\left(x^2-\frac{200}{3}x\right)+100000 \\ &= -30\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{400000}{3} \end{aligned}$$

x가 문제에서 정수이므로 $x=33$ 일 때 최대이다.
따라서 $3000-330=2670$(원)

37. 아래 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 16, 18, 20 인 삼각형에 원이 내접하고 있다. 접점 P, Q, R은 각각 점 A로부터 a, 점 B로부터 b, 점 C로부터 c만큼 떨어져 있다. 다음 중 옳은 것은?



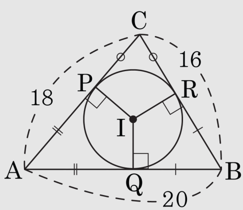
① $a=10, b=9, c=7$　② $a=10, b=9, c=8$

③ $a=11, b=10, c=6$　④ $a=11, b=9, c=7$

⑤ $a=12, b=9, c=6$

해설

다음 그림에서 I는 $\triangle$ABC의 내심이므로



$\overline{\mathrm{AP}}=a,\ \overline{\mathrm{QB}}=b,\ \overline{\mathrm{RC}}=c$라 할 때

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$에서 $a=20-b\cdots$㉠

$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CR}}$에서 $c=18-a\cdots$㉡

$\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $b=16-c\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢ 세 식을 모두 더해주면

$a+b+c=54-(a+b+c)$

$\therefore\ a+b+c=27$

$\therefore\ a=11,\ b=9,\ c=7$

38. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$ 이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$$

$$4a+3\geq 0$$

$$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$$

39. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \cdots$ ㉡
$(x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times 3 = -x + z = -10$,
$x = z + 10,\ z \geq 1$이므로
$x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

40. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3 ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로

$|x| = t\ (t \geq 0)$ 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

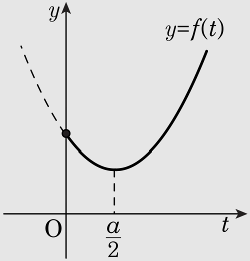
$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0,\ a^2 - 8 \leq 0$

$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$

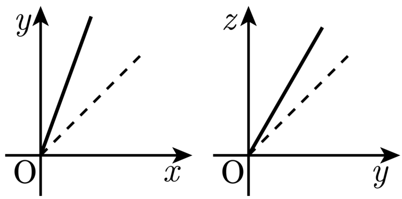
그런데 $a > 0$ 이므로

$0 < a \leq 2\sqrt{2}$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

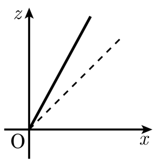


41. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

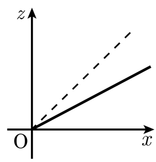


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

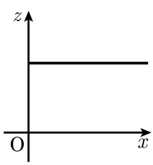
①



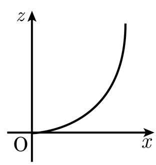
②



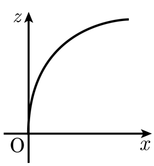
③



④



⑤



해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

42. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은

$x_1 x + y_1 y = 5 \cdots$ ①

이것이 점 $(3, 1)$을 지나므로

$3x_1 + y_1 = 5 \cdots$ ②

또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots$ ③

② 에서 $y_1 = 5-3x_1$ 을 ③에 대입하면

$x_1^2 + (5-3x_1)^2 - 5 = 0$,

$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$

$10(x_1-1)(x_1-2) = 0$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

43. n이 양의 정수일 때, $8^{100n}-1$을 9로 나눈 나머지는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$8=x$라 하면 $8^{100n}-1=x^{100n}-1$이고 $9=x+1$이 된다.
$x^{100n}-1$을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$x^{100n}-1=(x+1)Q(x)+R$
양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=0$
$\therefore\ x^{100n}-1=(x+1)Q(x)$
위의 식에 $x=8$을 대입하면 $8^{100n}-1=9Q(x)$이므로 $8^{100n}-1$을 9로 나눈 나머지는 0이다.

44. 복소수 z가 $z^2=\bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ (단, $a,\ b$는 실수) 라 하면

$(a+bi)^2=a-bi$

$a^2-b^2+2abi=a-bi$

$a^2-b^2=a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2ab=-b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $b=0$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2}$

(i) $b=0$ 일 때 ㉠에서 $a^2=a$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1$

(ii) $a=-\dfrac{1}{2}$ 일 때 ㉠에서 $\dfrac{1}{4}-b^2=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, $z=0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

45. $x^2+kxy-2y^2+3y-1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±6

해설

$x^2+kyx-(2y^2-3y+1)=0$ 에서

$D=k^2y^2+4(2y^2-3y+1)$

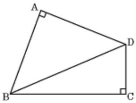
$\quad=(k^2+8)y^2-12y+4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=36-4(k^2+8)=0$

$\therefore k=\pm1$

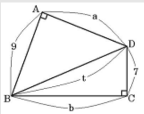
46. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB}=9$, $\overline{CD}=7$, $\angle BAD=\angle BCD=90°$이 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t라 할 때, t^2의 값을 구하면?



① 83　　② 85　　③ 87　　④ 120　　⑤ 130

해설

$\overline{AD}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BD}=t$라 할 때,



$9^2+a^2=7^2+b^2$, $b^2-a^2=32$

(자연수이므로, $b>a$)

$(b-a)(b+a)=32 \;\Rightarrow$ 부정방정식

$b>a$이므로

$b-a$, $b+a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$1\times32=32$, $2\times16=32$, $4\times8=32$, $\cdots$

$b-a=4$, $b+a=8$일 때 조건이 성립하므로,

$a=2$, $b=6$이다.

$b+a=16$, $b-a=2$일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$\therefore\; t^2=9^2+2^2=81+4=85$

47. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ② $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ③ $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

④ $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ⑤ $x^2+3y^2=6$

해설

A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=3$

$a^2+b^2=9\cdots$ ㉠

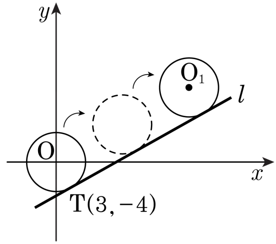
P$(x,\ y)$는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x=\dfrac{a}{3},\ y=\dfrac{2b}{3}$

$\therefore\ a=3x,\ b=\dfrac{3y}{2}\cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $9x^2+\dfrac{9}{4}y^2=9$

$\therefore\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

48. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, −4) 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 T(3, −4) 에서 원 O 와 접하므로

직선 OT 와 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

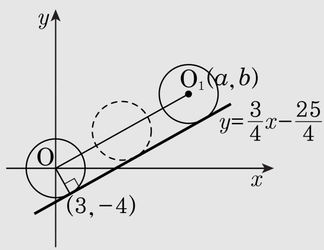
$\doteqdot \frac{b}{a}$ (직선 OO_1 의 기울기)

$=$ (직선 l 의 기울기)

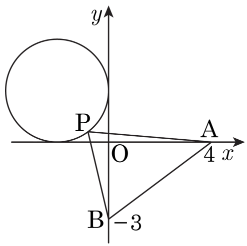
$=\frac{3}{4}$

직선 l 의 방정식은 $y-(-4)=\frac{3}{4}(x-3)$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$



49. 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위를 움직이는 점 P 와 두 점 A(4, 0), B(0, −3)으로 이루어지는 △ABP 의 넓이의 최솟값과 최댓값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 구하시오.

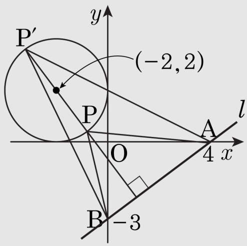


▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원 위의 한 점 P′ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 연장선 직선 l 에 이르는 거리가 최대일 때 △ABP′ 의 높이는 최대가 되고 넓이도 최대이다.
마찬가지로 원 위의 한 점 P 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 연장선
직선 l 에 이르는 거리가 최소일 때 △ABP 의
높이는 최소가 되고 넓이도 최소이다.



원의 중심 (−2, 2) 에서 A, B 를 지나는 직선
$l: 3x-4y-12=0$ 에 이르는 거리는

$$d=\frac{|-6-8-12|}{5}=\frac{26}{5}$$

$d+r$ 일 때 최대거리, $d-r$ 일 때 최소거리

$$\begin{cases} M=\left(\frac{26}{5}+2\right)\times\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{1}{2}=18 & (\because\ \overline{\mathrm{AB}}=5) \\ m=\left(\frac{26}{5}-2\right)\times\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{1}{2}=8 \end{cases}$$

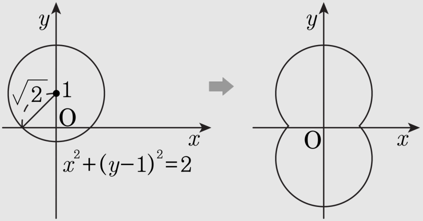
$\therefore\ M+m=26$

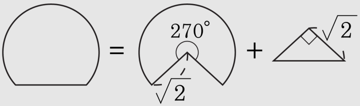
50. 원 $x^2+(y-1)^2=2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\pi+1$ ② $\pi+2$ ③ $3\pi+1$

④ $3\pi+2$ ⑤ $3\pi+4$

해설





(구하는 넓이)

$$=\left\{\pi\times(\sqrt{2})^2\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right\}\times 2$$

$$=3\pi+2$$