1. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 모두 고르면?

① $x^2 + 14x + 49 = (x - 7)^2$

② $16x^2 - 48x + 36 = (4x - 6)^2$

③ $9x^2 - 16 = (9x - 4)(x + 4)$

④ $x^2 - 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$

⑤ $5x^2 - 14x - 3 = (5x + 1)(x - 3)$

해설

① $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

③ $9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$

④ $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

2. $x^2 - (y^2 - 6y + 9)$ 를 인수분해하면?

① $(x - y - 5)(x - y + 2)$
② $(x - y + 5)(x - y + 2)$
③ $(x + y - 3)(x - y - 3)$
④ $(x + y + 3)(x - y + 3)$
⑤ $(x + y - 3)(x - y + 3)$

해설

$x^2 - (y^2 - 6y + 9)$
$= x^2 - (y - 3)^2$
$= (x + y - 3)(x - y + 3)$

3. 이차방정식 $2x^2-4x-3=0$ 을 완전제곱식을 이용하여 해를 구하면?

① $1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $1 \pm \sqrt{10}$ ③ $-1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$
④ $2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$

해설

$2x^2 - 4x - 3 = 0$

$2x^2 - 4x = 3$

$2(x^2 - 2x) = 3$

$x^2 - 2x = \frac{3}{2}$

$(x-1)^2 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

4. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 이 중근을 가질 때, 다음 중 옳은 것은?

① $b^2 - 4ac = 0$　　② $c = a^2$　　③ $x = \dfrac{b}{2a}$

④ $b^2 - 4ac < 0$　　⑤ $ac > 0$

해설

이차방정식이 중근을 가지면 $D = b^2 - 4ac = 0$ 이다.

5. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 점 $(2, -16)$ 을 지난다고 한다. 이때, 상수 a 의 값을 구하여라.

① -4 ② 4 ③ -3 ④ 3 ⑤ 0

해설

점 $(2, -16)$ 을 지나므로 이차함수식 $y = ax^2$ 에 대입하면
$-16 = 4a, \quad a = -4$

6. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

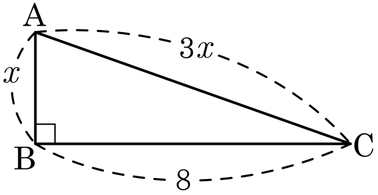
① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 6x + 5 \\ &= -(x-3)^2 + 14 \quad \therefore M = 14 \\ y &= 2x^2 - 12x - 4 \\ &= 2(x-3)^2 - 22 \quad \therefore m = -22 \end{aligned}$$

$\therefore M - m = 14 + 22 = 36$

7. 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 x 의 값을 구하면?



① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$(3x)^2 = x^2 + 8^2$

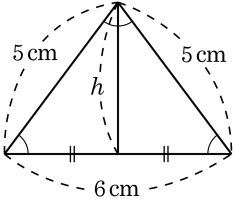
$9x^2 - x^2 = 64$

$8x^2 = 64$

$x^2 = 8$

$\therefore x = 2\sqrt{2}$

8. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 5 cm, 5 cm, 6 cm 인 이등변삼각형의 높이 h는?



① 1 cm ② 2 cm ③ 3 cm

④ 4 cm ⑤ 5 cm

해설

$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{cm}$

9. 9 의 제곱근을 a , 20 의 제곱근을 b 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$a^2=9,\ b^2=20$

$\therefore\ a^2+b^2=9+20=29$

10. 다음과 같이 옳은 것은 ○ 표, 옳지 않은 것은 × 표를 하였다. 바르게 표시되지 <u>않은</u> 것끼리 짝지어진 것은?

> (ㄱ) 0 의 제곱근은 없다. ⋯ (×)
>
> (ㄴ) -4 의 제곱근은 -2 이다. ⋯ (○)
>
> (ㄷ) 양수의 제곱근은 2 개이다. ⋯ (○)
>
> (ㄹ) 음수의 제곱근은 1 개이다. ⋯ (×)
>
> (ㅁ) 모든 유리수는 제곱근이 2 개이다. ⋯ (×)
>
> (ㅂ) 양수의 두 제곱근의 합은 0 이다. ⋯ (×)

① ㄱ, ㄹ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㅂ ④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㅁ

해설

(ㄱ) 0 의 제곱근은 0 이다.
(ㄴ) (ㄹ) 음수의 제곱근은 존재하지 않는다.
(ㄷ) 양수 a 의 제곱근은 $\sqrt{a}$ 와 $-\sqrt{a}$
(ㅁ) 음의 유리수는 제곱근이 존재하지 않고 0 의 제곱근은 0 이다.
(ㅂ) 양수의 두 제곱근의 합은 0 이다.

11. 제곱근 $\sqrt{(-4)^2}$ 를 A , $\frac{1}{4}$ 의 음의 제곱근을 B 라 할 때, AB 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

해설

$\sqrt{(-4)^2}=4$

(제곱근 4)$=\sqrt{4}=2=A$

$\left(\frac{1}{4}\text{의 음의 제곱근}\right)=-\frac{1}{2}=B$

$\therefore\ AB=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

12. 한 변의 길이가 각각 $\sqrt{6}\,\text{cm}$, $\sqrt{8}\,\text{cm}$ 인 정사각형 두 개가 있다. 이 두 정사각형의 넓이를 합하여 하나의 큰 정사각형으로 만들 때, 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $\sqrt{14}\,\text{cm}$

해설

$(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{8})^2 = 6 + 8 = 14$

큰 정사각형의 한 변의 길이는 14의 양의 제곱근

따라서 $\sqrt{14}\,\text{cm}$ 이다.

13. $\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{10}{\sqrt{18}}\right) + \frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{12} - 3)$ 이 유리수가 될 때, 유리수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{2}{3}$

해설

$$\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2} \times \frac{10}{3\sqrt{2}} + 2a - \frac{3}{\sqrt{3}}a$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{10}{3} + 2a - \sqrt{3}a$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - a\right) - \frac{10}{3} + 2a$$

유리수가 되기 위해서는 $\frac{2}{3} - a = 0$ 이므로

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

14. x 에 관한 이차식 $x^2 + ax - 15$ 가 $(x+p)(x+q)$ 로 인수분해 될 때, a 의 값으로 적당하지 않는 것은?

① 14 ② -14 ③ -8 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x^2 + ax - 15 = (x+p)(x+q)$

$-15 \Rightarrow -3 \times 5 \rightarrow a = -3 + 5 = 2,$

$-15 \Rightarrow 3 \times (-5) \rightarrow a = 3 - 5 = -2$

$-15 \Rightarrow (-1) \times 15 \rightarrow a = -1 + 15 = 14$

$-15 \Rightarrow 1 \times (-15) \rightarrow a = 1 - 15 = -14$

15. $a^2-8a-9b^2+16$ 을 인수분해하면?

① $(a+3b-4)(a-3b-4)$ ② $(a+3b+4)(a-3b-4)$

③ $(a+3b+4)(a+3b-4)$ ④ $(a-3b-4)^2$

⑤ $(a+3b+4)(a-3b+4)$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= a^2-8a+16-9b^2 \\
&= (a-4)^2-(3b)^2 \\
&= (a+3b-4)(a-3b-4)
\end{aligned}
$$

16. $x^2-\sqrt{7}x+1=0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① ± 1　　② 0　　③ $\pm\sqrt{3}$　　④ $\pm\sqrt{2}$　　⑤ $\pm\sqrt{7}$

해설

α 가 주어진 방정식의 근이므로

$x=\alpha$ 를 대입하면 $\alpha^2-\sqrt{7}\alpha+1=0$

양변을 α 로 나누면 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{7}$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-4$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=7-4=3$$

$$\therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}=\pm\sqrt{3}$$

17. 이차방정식 $x^2 + ax - 20 = 0$ 의 한 근이 5 이고, 다른 한 근은 $2x^2 - 3x + b = 0$ 의 근일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 44　② -44　③ 45　④ -45　⑤ -50

해설

$x = 5$ 를 $x^2 + ax - 20 = 0$ 에 대입하면

$25 + 5a - 20 = 0$

$\therefore\ a = -1$

$x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4) = 0$

따라서 다른 한 근은 $x = -4$ 이다.

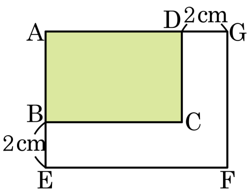
$x = -4$ 를 $2x^2 - 3x + b = 0$ 에 대입하면

$32 + 12 + b = 0$이다.

$\therefore\ b = -44$

$\therefore\ a + b = -1 + (-44) = -45$

18. 다음 그림과 같이 $\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 2$ 인 직사각형 ABCD 의 가로와 세로의 길이를 모두 2cm 씩 늘인 직사각형 AEFG 의 넓이는 직사각형 ABCD 의 넓이의 2 배와 같다. 이때, $\overline{AD}$ 의 길이는?



① 8cm ② 7cm ③ 6cm ④ 5cm ⑤ 4cm

해설

$\overline{AD} : \overline{AB} = 3 : 2$ 이므로 $\overline{AD} = 3x$, $\overline{AB} = 2x$ 라 하면, 직사각형 AEFG 의 넓이는 $(3x + 2)(2x + 2)$ 이다.

직사각형 ABCD 의 넓이는 $3x \times 2x$

$(3x + 2)(2x + 2) = 2 \times 3x \times 2x$

$6x^2 - 10x - 4 = 0$

$2(x - 2)(3x + 1) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 2$

$\therefore \overline{AD} = 3x = 3 \times 2 = 6(\text{cm})$

19. 다음 표는 동건이의 일주일동안 수학공부 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 수학공부 시간의 평균은?

요일	일	월	화	수	목	금	토
시간	2	1	0	3	2	1	5

① 1 시간 ② 2 시간 ③ 3 시간

④ 4 시간 ⑤ 5 시간

해설

$(\text{평균}) = \dfrac{\{(\text{변량})\text{의총합}\}}{\{(\text{변량})\text{의갯수}\}}$ 이므로

$\dfrac{2+1+0+3+2+1+5}{7} = \dfrac{14}{7} = 2(\text{ 시간})$ 이다.

20. 다음의 표준편차를 순서대로 x, y, z 라고 할 때, x, y, z 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

X : 1 부터 200 까지의 짝수 Y : 1 부터 200 까지의 홀수 Z : 1 부터 400 까지의 4 의 배수

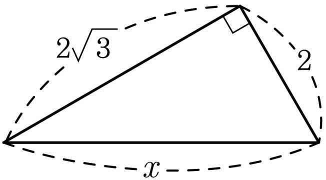
① $x = y = z$　　② $x < y = z$　　③ $x = y < z$

④ $x = y > z$　　⑤ $x < y < z$

해설

X, Y, Z 모두 변량의 개수는 100 개이다.
이때, X, Y 는 모두 2 만큼의 간격을 두고 떨어져 있으므로 X, Y 의 표준편차는 같다.
한편, Z 는 4 만큼의 간격을 두고 떨어져 있으므로 X, Y 보다 표준편차가 크다.

21. 다음 그림의 직각삼각형의 둘레의 길이는?



① $6+2\sqrt{3}$　② $3+6\sqrt{2}$　③ $2+3\sqrt{6}$

④ $3+2\sqrt{6}$　⑤ $2+6\sqrt{3}$

해설

피타고라스 정리에 따라

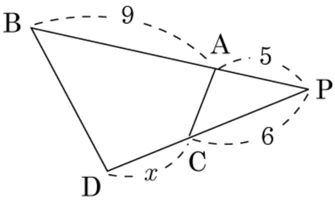
$(2\sqrt{3})^2+2^2=x^2$

$x^2=12+4=16$

$x>0$ 이므로 $x=4$ 이다.

따라서 둘레의 길이는 $4+2+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$ 이다.

22. 다음의 네 점 A, B, C, D 가 한 원 위에 있다고 할 때, x 의 값은?



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{17}{3}$

해설

네 점 A, B, C, D 가 한 원 위에 있으려면

$\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}} \times \overline{\mathrm{PD}}$이므로

$5 \times 14 = 6(6 + x)$

$70 = 36 + 6x, 6x = 34, x = \dfrac{17}{3}$

23. $\sqrt{19+x}$ 와 $\sqrt{120x}$ 가 모두 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\sqrt{19+x}$ 가 자연수가 되려면 $19+x = 25, 36, 49, \cdots$ $\therefore x = 6, 17, 30 \cdots$ ⋯㉠

$\sqrt{120x} = \sqrt{2^3 \times 3 \times 5 \times x}$ 가 자연수가 되려면 $\therefore x = 2 \times 3 \times 5, 2^3 \times 3 \times 5, \cdots$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 가장 작은 자연수 x는 30 이다.

24. $[x]$ 를 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수라고 하면 $-2 \leq x < -1$ 일 때, 방정식 $-[x]x^2 - x + 3[x] = 0$ 의 근이 $-\dfrac{a}{b}$ 라고 하면 $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$-2 \leq x < -1$ 이므로 $[x] = -2$ 이다.
따라서 $[x] = -2$ 를 대입하면 주어진 방정식은
$2x^2 - x - 6 = 0$ 이고, 인수분해하여 정리하면
$(2x+3)(x-2) = 0$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \ (\because -2 \leq x \leq 1)$$

따라서 $a = 3,\ b = 2$ 이므로 $a + b = 5$ 이다.

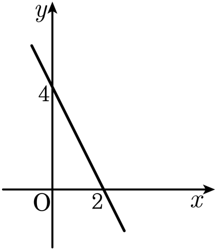
25. 이차함수 $y=-x^2+6x+4m-1$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 의 위에 있을 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y=-x^2+6x+4m-1$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면 $y=-(x-3)^2+8+4m$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4m+8)$ 이다. 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 을 지나므로 $-6+4m+8+6=0$, $4m=-8$, $m=-2$ 이다.

26. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?



① $(-2,\ 7)$ ② $(-2,\ -7)$

③ $(7,\ 2)$ ④ $(-7,\ 2)$

⑤ $(2,\ 7)$

해설

$a = -2, b = 4$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$$
$$= -x^2 + 4x + 3$$
$$= -(x-2)^2 + 7$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2, 7)$ 이다.

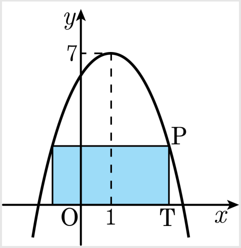
27. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.

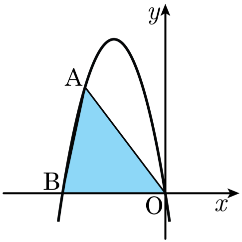
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$
\begin{aligned}
(\text{둘레의 길이}) &= 2\{2(t-1)-t^2+2t+5\} \\
&= 2(-t^2+4t+3) \\
&= -2t^2+8t+6 \\
&= -2(t-2)^2+14
\end{aligned}
$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

28. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차 함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36

④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ \ 0=-36-6b$
$b=-6,\ \ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로

$\triangle$OAB 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\dfrac{1}{2}\times 6\times 9=27$

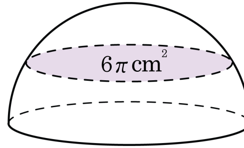
29. 길이가 6 cm , 8 cm 인 두 개의 막대가 있다. 여기에 막대 하나를 보태서 직각삼각형을 만들려고 한다. 필요한 막대의 길이로 가능한 것을 모두 고르면?

① $\sqrt{10}$ cm ② 10 cm ③ 100 cm
④ $2\sqrt{7}$ cm ⑤ 28 cm

해설

가능한 막대의 길이를 x cm 라 하자.
② $x > 8$ 이면
$6 + 8 > x(\mathrm{m})$ 이고 $6^2 + 8^2 = x^2$
$\therefore x = 10\,(\mathrm{cm})$
④ $x < 8$ 이면
$x + 6 > 8$ 이고 $x^2 + 6^2 = 8^2$
$\therefore x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}(\mathrm{cm})$
따라서 가능한 막대의 길이는 10 cm 또는 $2\sqrt{7}$ cm 이다.

30. 다음 반구에서 반지름의 $\frac{1}{2}$ 지점을 지나고 밑면에 평행하게 자른 단면의 넓이가 $6\pi\text{cm}^2$ 일 때, 반구의 겉넓이를 구하면?



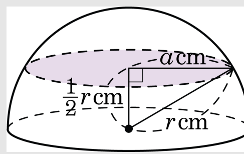
① $6\pi\,\text{cm}^2$　　② $12\pi\,\text{cm}^2$　　③ $18\pi\,\text{cm}^2$

④ $24\pi\,\text{cm}^2$　　⑤ $30\pi\,\text{cm}^2$

해설

밑면에 평행하게 자른 단면의 넓이가 $6\pi\,\text{cm}^2$ 이므로 단면의 반지름의 길이를 $a\,\text{cm}$ 라고 하면 $\pi a^2 = 6\pi$, $a^2 = 6$

$\therefore\ a = \sqrt{6}$



반구의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$ 라고 하면 $r^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2 + a^2$,

$\frac{3}{4}r^2 = 6$, $r^2 = 8$

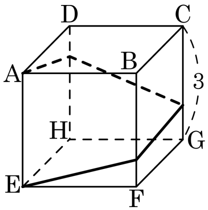
반구의 겉넓이 $=$ 구의 겉넓이 $\times \frac{1}{2} +$ 밑면의 넓이

구의 겉넓이 $\times \frac{1}{2} = 4\pi r^2 \times \frac{1}{2} = 4\pi \times 8 \times \frac{1}{2} = 16\pi(\text{cm}^2)$

밑면의 넓이 $= \pi r^2 = \pi \times 8 = 8\pi(\text{cm}^2)$

따라서 반구의 겉넓이는 $16\pi + 8\pi = 24\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

31. 다음 그림과 같은 정육면체의 한 꼭짓점 E 에서 모서리 BF, CG, DH 를 순서대로 지나 점 A 에 이르는 선 중에서 가장 짧은 선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

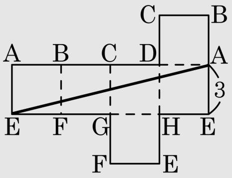
▷ 정답 : $3\sqrt{17}$

해설

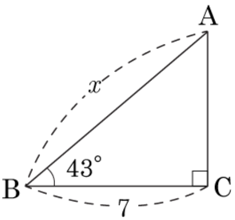
위의 그림에서 점 E 에서 모서리 BF, CG, DH 를 순서대로 지나 점 A 에 이르는 가장 짧은 선은 $\overline{\mathrm{EA}}$ 가 된다.

$\overline{\mathrm{EA}}^2 = 3^2 + 12^2 = 153$

$\therefore\ \overline{\mathrm{EA}} = 3\sqrt{17}$



32. 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB}$ 를 x 라 할 때, x 값으로 옳은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)



① $\dfrac{7}{\cos 43°}$　② $7\cos 43°$　③ $7\sin 43°$

④ $\dfrac{7}{\sin 43°}$　⑤ $\dfrac{7}{\sin 47°}$

해설

$$\cos B = \cos 43° = \frac{7}{x}$$

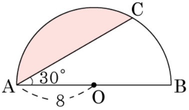
따라서 $x = \dfrac{7}{\cos 43°}$ 이다.

$\angle A = 90° - 43° = 47°$ 이므로

$$\sin A = \sin 47° = \frac{7}{x}$$

따라서 $x = \dfrac{7}{\sin 47°}$ 이다.

33. 그림과 같이 반지름의 길이가 8 인 반원에서 $\angle BAC = 30°$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



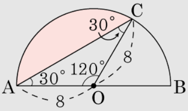
▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$

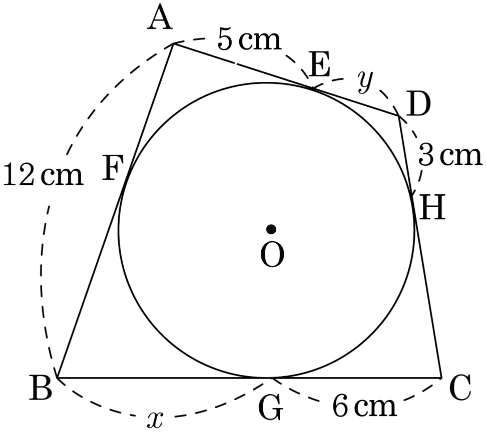
해설

$$8 \times 8 \times \pi \times \frac{120°}{360°} - \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin(180° - 120°)$$

$$= \frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$$



34. 다음 그림과 같이 □ABCD가 원 O에 외접할 때, $x+y$의 값은?



① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

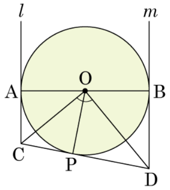
$\overline{AF} = \overline{AE} = 5(\text{cm})$

$\overline{DH} = \overline{ED} = 3(\text{cm})$

$\overline{BF} = \overline{BG} = 7(\text{cm})$

따라서 $x = 7(\text{cm}),\ y = 3(\text{cm})$

35. 다음 그림과 같이 원 O 의 지름 AB 의 양 끝점에서 그은 접선과 원 O 위의 점 P 에서 그은 접선이 만나는 점을 각각 C, D 라고 할 때, 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $\triangle AOC \equiv \triangle POC$　② $\angle AOC = \angle POC$

③ $\triangle BOD \equiv \triangle POD$　④ $\angle BOD = \angle POD$

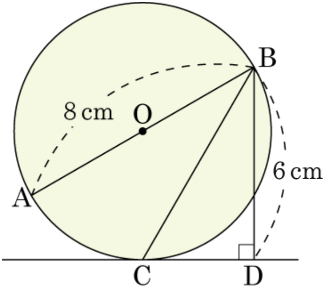
⑤ $\angle COP = \angle DOP$

해설

$\triangle AOC \equiv \triangle POC$ 이므로 $\angle AOC = \angle POC$

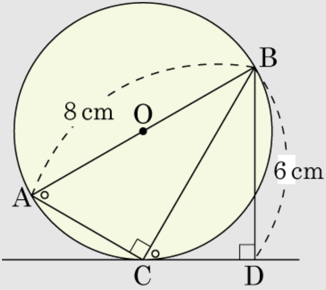
$\triangle BOD \equiv \triangle POD$ 이므로 $\angle BOD = \angle POD$

36. 다음 그림에서 $\overleftrightarrow{CD}$ 는 원 O 의 접선이다. $\overline{AB}$ 가 원의 지름이고 $\overline{CD} \perp \overline{BD}$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이는?



① 2cm
② 4cm
③ $2\sqrt{3}$cm
④ $3\sqrt{2}$cm
⑤ $4\sqrt{2}$cm

해설



$\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \angle BCD$ 이므로

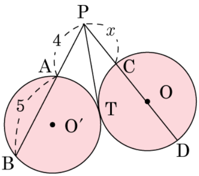
$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (AA 닮음)

$\therefore\ 8 : \overline{BC} = \overline{BC} : 6$

$\overline{BC}^2 = 48$, $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$ cm

$\therefore\ \overline{AC} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ cm

37. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 두 원 O, O′ 의 공통접선이다. $\overline{PA}=4$, $\overline{AB}=5$ 이고 $\overline{PC}:\overline{CO}=1:2$ 일 때, 원 O 의 넓이는 $\frac{b}{a}\pi$ 라고 한다. 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b는 서로소)



▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$4\times 9=x\times 5x,\quad x^2=\dfrac{36}{5}$

한편, 원의 넓이는 $\dfrac{144}{5}\pi$ 이다.

따라서 $a+b=5+144=149$ 이다.

38. $\sqrt{\dfrac{12x}{y}}$ 가 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\sqrt{\dfrac{12x}{y}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \times 3 \times x}{y}}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x, y 는 다음과 같다.

분모 y 는 $2^2 \times 3 \times x$ 의 약수가 되어야 하므로

$y = 1$ 일 때, x 는 $3 \times$ (자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $3 \times 1^2 = 3$ 이다. $\therefore x + y = 3 + 1 = 4$

$y = 2$ 일 때, x 는 $2\times3\times$(자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $2\times3\times1^2 = 6$ 이다. $\therefore x + y = 6 + 2 = 8$

$y = 3$ 일 때, x 는 (자연수)^2 꼴이므로 최솟값은 $1^2 = 1$ 이다. $\therefore x + y = 1 + 3 = 4$

y 가 1, 2, 3 이외의 자연수일 때, $x + y \geq 7$ ($y = 4$ 일 때, $x = 3$) 이다.

따라서 $x + y$ 의 최솟값은 4 이다.

39. 1 보다 큰 실수 a, b 에 대하여 $(a-1)^2=(b+1)^2=2$ 일 때, a^8-b^8 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $816\sqrt{2}$

해설

$a>1,\ b>1$ 이므로

$(a-1)^2=2$ 에서 $a=\sqrt{2}+1$

$(b+1)^2=2$ 에서 $b=\sqrt{2}-1$

따라서 $a+b=2\sqrt{2}$, $a-b=2$, $ab=1$ 이므로

$a^2+b^2=8-2=6$

$a^4+b^4=36-2=34$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^8-b^8&=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)\\&=34\times6\times2\sqrt{2}\times2=816\sqrt{2}\end{aligned}$$

40. 이차방정식 $ax^2-\left(\frac{a}{b}+3\right)x+\frac{a}{b}+1=0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 -2 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{16}$

해설

x^2 의 계수가 a 이고 두 근의 합이 2, 곱이 -2 인 이차방정식은 $a(x^2-2x-2)=0$ 이고 주어진 식의 계수와 비교하면

$-\left(\frac{a}{b}+3\right)=-2a \cdots$ ㉠

$\frac{a}{b}+1=-2a \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{4}$

$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

41. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0,\ a)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.

㉣ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

㉤ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠,㉡,㉠　② ㉠,㉡,㉣　③ ㉠,㉡,㉤

④ ㉡,㉢,㉣　⑤ ㉡,㉣,㉤

해설

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$을 축으로 하고 점 $(0,\ b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.
따라서 옳은 것은 ㉡,㉣,㉤이다.

42. 두 직선 $(3+a)x+y=1$, $4x+(2a-1)y=1$이 평행할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{2}$

해설

$$\frac{3+a}{4}=\frac{1}{2a-1}\neq 1$$

$$(a+3)(2a-1)=4$$

$$2a^2+5a-7=0$$

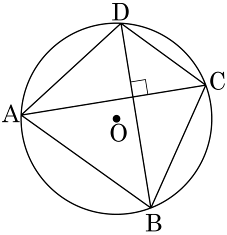
$$(a-1)(2a+7)=0$$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=-\frac{7}{2}$

그런데 $\frac{1}{2a-1}\neq 1$

즉 $a\neq 1$이어야 하므로 $a=-\frac{7}{2}$이다.

43. 다음 그림과 같이 사각형 ABCD 는 원 O 에 내접하고, 대각선 AC, BD 는 직교한다. $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 3\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하여라.

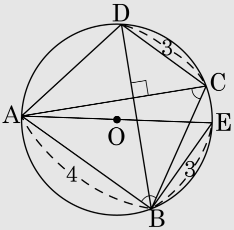


▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\text{cm}^2}$

▷ 정답 : $\frac{25}{4}\pi$ $\underline{\text{cm}^2}$

해설

점 A 에서 원의 중심 O 를 지나는 지름을 그으면



사각형 BECD 는 등변사다리꼴이므로

$\overline{BE} = \overline{CD} \cdots$ ㉠

또한 삼각형 ABE 에서 $\angle$ABE 는 지름에 대한 원주각으로 $90°$ 이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AE}^2$

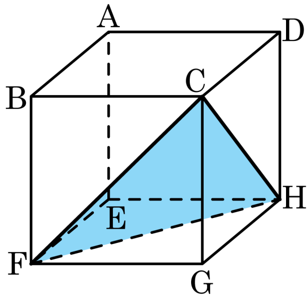
$4^2 + 3^2 = \overline{AE}^2$

$\therefore\ \overline{AE} = 5(\text{cm})$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}\text{cm}$ 이므로

원의 넓이는 $\frac{25}{4}\pi\ (\text{cm}^2)$ 이다.

44. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12 인 정육면체의 한 꼭짓점 A 에서 삼각형 CFH 에 내린 수선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $8\sqrt{3}$

해설

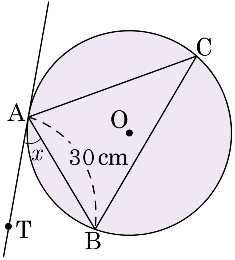
입체도형 A – CFH 는 한 모서리의 길이가 $12\sqrt{2}$ 인 정사면체이고 꼭짓점 A 에서 밑면 CFH 에 내린 수선의 발을 P 라 하면 점 P 는 $\triangle$CFH 의 무게중심이다.

즉, $\overline{\mathrm{CP}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 12\sqrt{2} \times \dfrac{2}{3} = 4\sqrt{6}$

따라서 $\triangle$ACP 에서

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(12\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{6})^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ 이다.

45. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 원 O 에 내접하고 $\overleftrightarrow{AT}$ 는 원 O 의 접선이다. $\angle BAT = x$ 라 하고 $\cos x = \frac{4}{5}$, $\overline{AB} = 30\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 지름의 길이는?



① 25 cm　　② 50 cm　　③ 60 cm

④ 67 cm　　⑤ 70 cm

해설

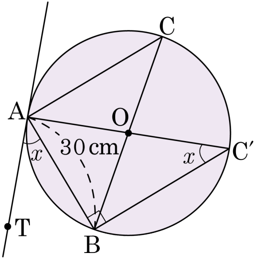
반지름의 길이를 r 이라 하면, $\triangle ABC'$ 은 직각삼각형이므로

$\cos x = \dfrac{\overline{BC'}}{2r} = \dfrac{4}{5}$　　$\therefore\ \overline{BC'} = \dfrac{8}{5}r$

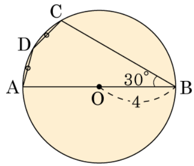
직각삼각형 ABC' 에서 $30^2 + \left(\dfrac{8}{5}r\right)^2 = (2r)^2$, $\dfrac{36}{25}r^2 = 900$, $r^2 = 625$, $r = 25$

$\therefore\ r = 25\ (\text{cm})$

따라서 원의 지름은 50 cm 이다.



46. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 4 인 원 O 에 내접하는 사각형 ABCD 에서 $\angle B = 30°$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ 일 때, □ABCD 의 넓이는?

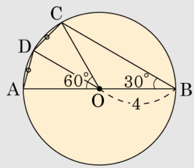


① 8　② $6+2\sqrt{3}$　③ $8+2\sqrt{3}$

④ $8+4\sqrt{3}$　⑤ $9+3\sqrt{3}$

해설

중심 O 에서 점 C 와 D 에 보조선을 그으면



$\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OC},\ \overline{AD} = \overline{CD} \Rightarrow \triangle AOD \equiv \triangle COD$(SSS 합동)

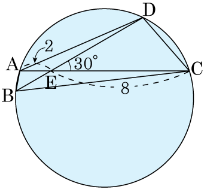
$\angle AOC = 60°$ 이므로 $\angle AOD = \angle COD = 30°$

□ABCD 의 넓이$= \triangle AOD + \triangle COD + \triangle BOC$

$\triangle AOD = \triangle COD = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 30° = 4$, $\triangle BOC = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin(180° - 120°) = 4\sqrt{3}$

따라서 □ABCD 의 넓이$= 4 + 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$ 이다.

47. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD 에서 $\overline{AE} = 2$, $\overline{EC} = 8$, $\angle DEC = 30°$ 이다. 이 사각형의 넓이가 20 일 때, $\overline{DE}$ 의 길이는?



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

□ABCD 의 넓이가 20 이므로

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \overline{BD} \times \sin 30° = 20$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \overline{BD} \times \frac{1}{2} = 20$$

$$\therefore\ \overline{BD} = 8$$

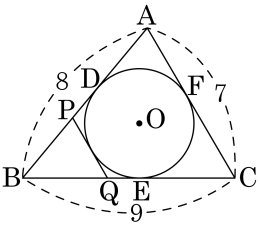
$\overline{DE} = x$ 라면, $\overline{BE} = 8 - x$

$2 \times 8 = x(8 - x),\ 16 = 8x - x^2$

$x^2 - 8x + 16 = 0, (x - 4)^2 = 0$

$\therefore x = 4$

48. 다음 그림과 같이 세 변 AB, BC, CA 의 길이가 각각 8, 9, 7 인 $\triangle ABC$ 에 내접하는 원 O 에 대하여 D, E, F 는 접점이고 $\overline{PQ}$ 가 원 O 에 접할 때, $\triangle PBQ$ 의 둘레의 길이를 구하여라.

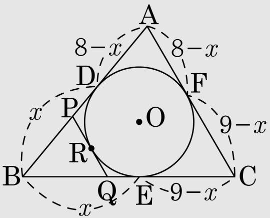


▶ 답 :

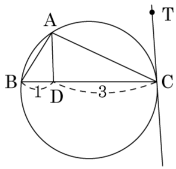
▷ 정답 : 10

해설

다음 그림에서 $\overline{BD} = x$ 라 하면
$\overline{AD} = \overline{AF} = 8 - x$, $\overline{EC} = \overline{CF} = 9 - x$,
$\overline{AC} = (8 - x) + (9 - x) = 17 - 2x = 7$
$\therefore x = 5$
이때 $\overline{PQ}$ 와 원 O 의 접점을 R 라 하면
$\overline{PR} = \overline{PD}$, $\overline{QR} = \overline{QE}$ 이므로 $\triangle PBQ$ 의 둘레의 길이는 $2\overline{BD}$ 이다.
$\therefore\ 2\overline{BD} = 2x = 2 \times 5 = 10$



49. 다음 그림과 같이 삼각형 ABC 가 원에 내접한다. 점 A 를 지나 접선 TC 에 평행한 직선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점이 점 D 이고, $\overline{BD} = 1$, $\overline{CD} = 3$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이를 구하여라.

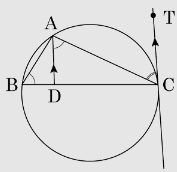


▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{3}$

해설

$\overline{TC}$ 가 접선이므로 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여
$\angle TCA = \angle ABC$
$\overline{TC} \,/\!/\, \overline{AD}$ 이므로 $\angle TCA = \angle CAD$



$\triangle ABC$ 와 $\triangle DAC$ 에서
$\angle ABC = \angle DAC$, $\angle ACD$ 는 공통
즉, $\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ (AA 닮음)
$\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{BC} : \overline{AC}$
$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC} = 3 \times 4 = 12$
$\therefore \ \overline{AC} = 2\sqrt{3}$ ($\because \overline{AC} > 0$)

50. 원 O 의 외부에 있는 한 점 P 를 지나면서 원 O 와 접하는 접선과 원 O 의 교점을 T 라 하고, 직선 OP 를 지나는 직선이 원 O 와 만나는 직선을 P 에서 가까운 쪽부터 각각 A, B 라 할 때, $\overline{PT} = 3$, $\angle ABT = 30°$ 이다. 이때, 원 O 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3π

해설

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT}$ 이므로 삼각형 OBT 는 이등변삼각형이므로,
삼각형 OPT 는 $\angle POT = 60°$ 인 직각삼각형이다.
$\overline{PT} : \overline{OT} = \sqrt{3} : 1$, $3 : \overline{OT} = \sqrt{3} : 1$
$\therefore \overline{OT} = \sqrt{3}$
따라서 원 O 의 넓이는 3π