1. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 a_1, a_2, $\cdots$,a_{10}을 넣어 12개의 수 48, a_1, a_2, $\cdots$,a_{10}, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\dfrac{12(48+2)}{2}=300$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=300-(48+2)=300-50=250$

2. 수열 a, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, b, $\cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 d라 하면 $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

3. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots$ ㉠
$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots$ ㉡
㉡ $\div$ ㉠에서 $r^4 = 16$
$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$
㉠에 대입하면 $a = \frac{3}{2}$
첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

4. 3 과 75 의 등비중항을 x, 3 과 75 의 등차중항을 y 라 할 때, $x+y$ 의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x는 3 과 75 의 등비중항이므로
$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$
$\therefore\ x = 15$
y는 3 과 75 의 등차중항이므로
$2y = 3 + 75 = 78$
$\therefore\ y = 39$
$\therefore\ x + y = 15 + 39 = 54$

5. 집합 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.)

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow$ 등차수열

① 공차가 2인 경우 (4가지)

2, 4, 6　4, 6, 8　6, 8, 10　8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10　4, 8, 12

6. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

7. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 3일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$의 공차는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라고 할 때,

$$3a_n + 5b_n$$
$$= 3\left\{a + (n-1) \times (-2)\right\} + 5\left\{b + (n-1) \times 3\right\}$$
$$= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1)$$
$$= 3a + 5b + 9(n-1)$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$은 첫째항이 $3a + 5b$이고, 공차가 9인 등차수열이다.

8. 2와 $\frac{2}{3}$ 사이에 두 수 a, b를 넣어서 만든 4개의 수 2, a, b, $\frac{2}{3}$가 이 순서로 조화수열을 이룰 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 값은?

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

2, a, b, $\frac{2}{3}$가 조화수열을 이루므로 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{3}{2}$이 등차수열을 이룬다.

따라서 $\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{b}$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

9. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 100$

$2a + 9d = 20$

$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a+19d)}{2} - 100 = 300$

$10(2a + 19d) = 400$

$2a + 19d = 40$

$2a + 9d + 10d = 40$

$20 + 10d = 40$

$d = 2$

$\therefore 2a = 2,\ a = 1$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a+29d)}{2} - (100+300) \\ &= \frac{30(2+29\times 2)}{2} - 400 \\ &= 15\times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

10. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)
$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$
$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} - \frac{7(105 + 195)}{2}$
$= 47 \cdot 150$
$\therefore \ \frac{1}{150}S = 47$

11. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n의 최댓값은?

① 56 ② 62 ③ 64 ④ 68 ⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_3 = 11$에서

$a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_{14} = -11$에서 $a + 13d = -11 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$

$\therefore\ a_n = 15 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 17$

이때 S_n이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로

$-2n + 17 > 0$에서

$2n < 17 \quad \therefore\ n < \dfrac{17}{2} = 8.5$

따라서 S_n의 최댓값은 S_8이므로

$$S_8 = \frac{8\{2 \cdot 15 + 7 \cdot (-2)\}}{2} = 64$$

12. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$의 음수인 항의 합은?

① -75 ② -76 ③ -77 ④ -78 ⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 25n) - \left\{2(n-1)^2 - 25(n-1)\right\} \\ &= 4n - 27 \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$일 때

$a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = -23$

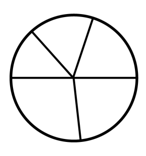
(i), (ii)에서 $a_n = 4n - 27$ $(n \geq 1)$

한편, $a_n = 4n - 27 < 0$에서 $n < \frac{27}{4} = 6.75$

따라서 첫째항부터 제 6항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2}\left\{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\right\} = -78$$

13. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때 k의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$라 하면

$2(a-2d)=a+2d$

$2a-4d=a+2d$

$a=6d$

$\therefore 4d,\ 5d,\ 6d,\ 7d,\ 8d$

그런데 $\frac{5(4d+8d)}{2}=15^2\pi$

$6d=45\pi$

$d=\frac{15}{2}\pi$

$\therefore 8d=8\cdot\frac{15}{2}\pi=60\pi$

$\therefore k=60$

14. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열일 때, $\dfrac{a_{11}+a_{13}+a_{15}+a_{17}}{a_1+a_3+a_5+a_7}$의 값은?

① 3^9 ② 3^{10} ③ 3^{11} ④ 3^{12} ⑤ 3^{13}

해설

$a_n = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$

$\dfrac{3^{11}+3^{13}+3^{15}+3^{17}}{3+3^3+3^5+3^7}$

$= \dfrac{3^{10}(3+3^3+3^5+3^7)}{3+3^3+3^5+3^7}$

$= 3^{10}$

15. 다섯 개의 수 10, a, b, c, 90은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 10, d, e, f, 90은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, $b+e$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 80

해설

b는 10과 90의 등차중항이므로

$b = \frac{10+90}{2} = 50$

e는 10과 90의 등비중항이므로

$e = \sqrt{10 \times 90} = 30 \quad \therefore b+e = 80$

16. 부피가 8이고 겉넓이가 28인 직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 $a,\ ar,\ ar^2$ 이라 하면

(부피)$= a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$

$\therefore\ ar = 2 \cdots$ ㉠

(겉넓이)$= 2(a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)$

$= 2\left\{a \cdot ar + (ar)^2 \cdot r + (ar)^2\right\}$

$= 2(2a + 4r + 2^2)$

$= 4a + 8r + 8 = 28$

$\therefore\ a + 2r = 5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1,\ r = 2$ 또는 $a = 4,\ r = \frac{1}{2}$

따라서 (가로의 길이, 세로의 길이, 높이)가 $(1,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 1)$ 이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

17. 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 4$, $S_{2n} = 12$이다. S_{6n}의 값은?

① 252 ② 272 ③ 292 ④ 312 ⑤ 332

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r \neq 1)$이라 하면

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4 \cdots ㉠$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)(r^n + 1)}{r - 1} = 12 \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^4 + 1) = 12$

$r^n + 1 = 3 \quad \therefore \ r^n = 2$

$$S_{6n} = \frac{a(r^{6n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{2n} - 1)(r^{4n} + r^{2n} + 1)}{r - 1}$$

$$= 12(2^4 + 2^2 + 1) = 252$$

18. 재진이가 첫날에 1원, 둘째날에 2원, 셋째날에 4원, $\cdots$ 과 같이 매일 전날의 2배씩 30일간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $2^{30}-2$(원)　② $2^{30}-1$(원)　③ 2^{30}(원)
④ $2^{30}+1$(원)　⑤ $2^{30}+2$(원)

해설

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_{30}=\frac{1\cdot(2^{30}-1)}{2-1}=2^{30}-1(\text{원})$$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $\log_3(S_n+1)=n$을 만족할 때, a_3의 값은?

① 6　　② 10　　③ 14　　④ 18　　⑤ 22

해설

$3^n = S_n + 1$

$S_n = 3^n - 1$

$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$

$$\begin{aligned} a_n &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \ (n \geq 2) \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$

20. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) - \sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1) = 62$를 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1) - \sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

$= \sum_{k=1}^{n}(k^2+1) - \left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-1) - (n^2-1)\right\}$

$= \sum_{k=1}^{n}\left\{(k^2+1) - (k^2-1)\right\} + (n^2-1)$

$= \sum_{k=1}^{n} 2 + (n^2-1) = n^2 + 2n - 1 = 62$

이것을 정리하여 인수분해하면 $(n+9)(n-7) = 0$

따라서 $n = -9$ 또는 $n = 7$

그런데 $n > 0$이므로 $n = 7$

21. 수열 $1\cdot1,\ 2\cdot3,\ 3\cdot5,\ 4\cdot7,\cdots$ 에서 첫째항부터 제 n항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1)-3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

22. 등차수열 $2,\ 5,\ 8,\ \cdots,68$의 합을 기호 $\sum$를 써서 나타내면 $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$이다. 이때 상수 $a,\ b,\ n$의 합 $a+b+n$의 값은? (단,n은 자연수이다.)

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

해설

주어진 등차수열은 첫째항이 2, 공차가 3이므로 일반항 a_n은
$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n-1$
이때, $3n-1 = 68$에서
$3n = 69 \quad \therefore n = 23$
즉, $2+5+8+\cdots+68 = \sum_{k=1}^{23}(3k-1)$
$\therefore a = 3,\ b = -1,\ n = 23$
$\therefore a+b+n = 3-1+23 = 25$

23. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$　　② $n^2 + 3n$　　③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$　　⑤ $3n^2 - 1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \left\{(n-1)^2 + (n-1)\right\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n}(4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

24. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n\left\{2 \cdot 5 + (n-1)4\right\}}{2} = n(2n+3)$$

$$\therefore\ b_n = \frac{n(2n+3)}{n} = 2n+3(\text{단}, n \neq 0)$$

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $b_1 = 2+3 = 5$이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$인 등차수열이다.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \frac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에서
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 36$,
$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n} = 18$일 때,
$a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \cdots ㉠$$

$S_{2n} - S_n = 18$에서 $S_{2n} = S_n + 18 = 36 + 18 = 54$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r} \\ &= 36 \cdot (1+r^n) = 54 \end{aligned}$$

$$1 + r^n = \frac{3}{2} \quad \therefore\ r^n = \frac{1}{2}$$

$$S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$$

$$= 36\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = 63$$

이때, $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n} = S_{3n} - S_n$이므로
$63 - 54 = 9$

26. $A=2^{2014}$, $B=3^{2014}$ 이라 할 때, 6^{2014} 의 양의 약수의 총합을 A 와 B 로 나타내면?

① $\frac{1}{2}(2A-1)(3B-1)$　　② $\frac{1}{3}(2A-1)(3B-1)$

③ $(2A-1)(3B-1)$　　④ $(2A+1)(3B+1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A+1)(3B+1)$

해설

$6^{2014}=2^{2014}\times 3^{2014}$ 이므로 6^{2014} 의 양의 약수의 총합은

$(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2014})(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{2014})$

$=\frac{2^{2015}-1}{2-1}\times\frac{3^{2015}-1}{3-1}$

$=(2^{2015}-1)\cdot\frac{3^{2015}-1}{2}$

$=\frac{1}{2}(2A-1)(3B-1)$

27. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$이라 하자. P_n의 값이 최대일 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$이고, $a_n \neq 1$이므로
$a_{n+1} > 1$이면 $P_n \times a_{n+1} > p_n$,
즉, $p_{n+1} > p_n$
$a_{n+1} < 1$이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$
따라서, $a_n > 1$인 마지막 항까지의 곱이 P_n의 최댓값이다.

$a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1,\ 2^{n-1} < 3000$

$2^{11} = 2048$이므로 $n - 1 = 11 \quad \therefore\ n = 12$

28. 퇴직금으로 받은 2억 원을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액을 연금형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 20년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은?(단, $1.05^{20} = 2.6$, 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산한다.)

① 1625만원 ② 1734만원 ③ 2085만원
④ 2480만원 ⑤ 2600만원

해설

할부 계산과 마찬가지로 계산 시점은 20년 후 마지막 수령년도를 기준으로 계산한다.
매년 지급받을 연금을 a만원이라 하면

$$20000 \times 1.05^{20} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$20000 \times 2.6 = \frac{a(2.6 - 1)}{0.05}$$

$$\therefore \ a = \frac{20000 \times 2.6 \times 0.05}{1.6} = 1625(\text{만원})$$

29. $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$ 일 때, $100S$ 의 값은?

① 95 ② 100 ③ 105 ④ 110 ⑤ 115

해설

$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{19\cdot 20}$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$

$=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

$\therefore 100S=100\times\frac{19}{20}=95$

30. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는?

$$a_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}},\ a_2 = \sqrt{5+2\sqrt{6}},\ a_3 = \sqrt{7+2\sqrt{12}},\cdots$$

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$a_1 = 1+\sqrt{2}$
$a_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$
$a_3 = \sqrt{3}+\sqrt{4}$
$\vdots$
$a_n = \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$
$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$S_n = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+$
$\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$S_n = \sqrt{n+1}-1$ 이 한자리 자연수가 되어야 한다.
$S_3 = \sqrt{4}-1 = 1$
$S_8 = \sqrt{9}-1 = 3-2 = 2$
$\vdots$
$S_{120} = \sqrt{121}-1 = 11-1 = 10$
$\therefore$ 9개

31. x에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값은?

① $\alpha+\beta = \frac{1}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
② $\alpha+\beta = \frac{10}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
③ $\alpha+\beta = \frac{10}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{2}{11}$
④ $\alpha+\beta = 11$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
⑤ $\alpha+\beta = 11$, $\alpha\beta = -22$

해설

$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2$이고,

$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= x\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\}$

$= x\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}x$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 - \frac{10}{11}x - 55 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$

$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$

32. 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n = 3^n - 10\left[\dfrac{3^n}{10}\right]$, $b_n = 7^n - 10\left[\dfrac{7^n}{10}\right]$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{50} a_n - \sum_{n=1}^{50} b_n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① -50 ② -25 ③ -10 ④ -8 ⑤ -4

해설

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하여 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$를 구해보면
$a_1 = a_5 = a_9 = \cdots = 3$
$a_2 = a_6 = a_{10} = \cdots = 9$
$a_3 = a_7 = a_{11} = \cdots = 7$
$a_4 = a_8 = a_{12} = \cdots = 1$
$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하여 $b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots$를 구해보면
$b_1 = b_5 = b_9 = \cdots = 7$
$b_2 = b_6 = b_{10} = \cdots = 9$
$b_3 = b_7 = b_{11} = \cdots = 3$
$b_4 = b_8 = b_{12} = \cdots = 1$
이므로 자연수 k에 대하여

$$a_n - b_n = \begin{cases} -4(n = 4k-3) \\ 0(n = 4k-2) \\ 4(n = 4k-1) \\ 0(n = 4k) \end{cases}$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{50} a_n - \sum_{n=1}^{50} b_n = \sum_{n=1}^{50}(a_n - b_n)$
$= 12\sum_{n=1}^{4}(a_n - b_n) + (-4) + 0 = -4$