

1. 두 수 48과 2 사이에 10개의 수 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 을 넣어 12개의 수 48, $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2$ 가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 200

② 250

③ 300

④ 350

⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제 12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 300 - (48 + 2) = 300 - 50 = 250$$

2. 수열 $a, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, b, \dots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$\text{공차를 } d \text{ 라 하면 } d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

3. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

4. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

5. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \text{등차수열}$$

① 공차가 2인 경우 (4가지)

2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10 4, 8, 12

6. 두 수 $2p + 1$ 과 $2p + 5$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$2p + 1, p^2, 2p + 5 \text{ 가 등차수열을 이루므로 } p^2 = \frac{(2p + 1) + (2p + 5)}{2}$$

$$2p^2 = 4p + 6, p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p + 1)(p - 3) = 0$$

따라서 $p = -1$ 또는 $p = 3$

이때, p 는 양수이므로 $p = 3$

7. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 -2 , 3 일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 의 공차는?

① 4

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라고 할 때,

$$3a_n + 5b_n$$

$$= 3\{a + (n-1) \times (-2)\} + 5\{b + (n-1) \times 3\}$$

$$= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1)$$

$$= 3a + 5b + 9(n-1)$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 은 첫째항이 $3a + 5b$ 이고, 공차가 9인 등차수열이다.

8. 2와 $\frac{2}{3}$ 사이에 두 수 a, b 를 넣어서 만든 4개의 수 2, $a, b, \frac{2}{3}$ 가 이 순서로 조화수열을 이룰 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값은?

① $\frac{7}{4}$

② 2

③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

2, $a, b, \frac{2}{3}$ 가 조화수열을 이루므로 $\frac{1}{2}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{3}{2}$ 이 등차수열을 이룬다.

$$\text{따라서 } \frac{1}{a} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{b}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

9. 어떤 등차수열의 첫째항부터 10까지의 합이 100이고, 11항부터 20항까지의 합이 300일 때 21항부터 30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 500

해설

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 100$$

$$2a + 9d = 20$$

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20(2a + 19d)}{2} - 100 = 300$$

$$10(2a + 19d) = 400$$

$$2a + 19d = 40$$

$$2a + 9d + 10d = 40$$

$$20 + 10d = 40$$

$$d = 2$$

$$\therefore 2a = 2, a = 1$$

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{30(2a + 29d)}{2} - (100 + 300) \\ &= \frac{30(2 + 29 \times 2)}{2} - 400 \\ &= 15 \times 60 - 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

10. 100이상 200이하의 자연수 중에서 3또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

11. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 11$, $a_{14} = -11$ 일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 의 최댓값은?

① 56

② 62

③ 64

④ 68

⑤ 70

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 11$ 에서 $a + 2d = 11 \cdots \textcircled{㉠}$

$a_{14} = -11$ 에서 $a + 13d = -11 \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 15$

$$\therefore a_n = 15 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 17$$

이때 S_n 이 최대가 되려면 양수인 항만 모두 더하면 되므로 $-2n + 17 > 0$ 에서

$$2n < 17 \quad \therefore n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n 의 최댓값은 S_8 이므로

$$S_8 = \frac{8 \{2 \cdot 15 + 7 \cdot (-2)\}}{2} = 64$$

12. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = 2n^2 - 25$ 으로 표시되는 수열 $\{a_n\}$ 의 음수인 항의 합은?

① -75

② -76

③ -77

④ -78

⑤ -79

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\&= (2n^2 - 25n) - \{2(n-1)^2 - 25(n-1)\} \\&= 4n - 27\end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 \text{ 이므로 } a_1 = -23$$

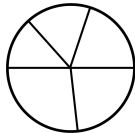
(i), (ii)에서 $a_n = 4n - 27$ ($n \geq 1$)

$$\text{한편, } a_n = 4n - 27 < 0 \text{ 에서 } n < \frac{27}{4} = 6.75$$

따라서 첫째항부터 제 6 항까지가 음수인 항이므로 음수인 항의 합은

$$S_6 = \frac{6}{2} \{2 \times (-23) + (6-1) \times 4\} = -78$$

13. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 라 하면

$$2(a - 2d) = a + 2d$$

$$2a - 4d = a + 2d$$

$$a = 6d$$

$$\therefore 4d, 5d, 6d, 7d, 8d$$

$$\text{그런데 } \frac{5(4d + 8d)}{2} = 15^2\pi$$

$$6d = 45\pi$$

$$d = \frac{15}{2}\pi$$

$$\therefore 8d = 8 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi$$

$$\therefore k = 60$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째 항이 3, 공비가 3인 등비수열일 때,
 $\frac{a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7}$ 의 값은?

① 3^9

② 3^{10}

③ 3^{11}

④ 3^{12}

⑤ 3^{13}

해설

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\frac{3^{11} + 3^{13} + 3^{15} + 3^{17}}{3 + 3^3 + 3^5 + 3^7}$$

$$= \frac{3^{10}(3 + 3^3 + 3^5 + 3^7)}{3 + 3^3 + 3^5 + 3^7}$$

$$= 3^{10}$$

15. 다섯 개의 수 $10, a, b, c, 90$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, $10, d, e, f, 90$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, $b+e$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

b 는 10과 90의 등차중항이므로

$$b = \frac{10 + 90}{2} = 50$$

e 는 10과 90의 등비중항이므로

$$e = \sqrt{10 \times 90} = 30 \quad \therefore b + e = 80$$

16. 부피가 8이고 겹넓이가 28인 직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 이 직육면체의 모서리의 길이의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a , ar , ar^2 이라 하면

$$(\text{부피}) = a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 8$$

$$\therefore ar = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(\text{겹넓이}) = 2(a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)$$

$$= 2\{a \cdot ar + (ar)^2 \cdot r + (ar)^2\}$$

$$= 2(2a + 4r + 2^2)$$

$$= 4a + 8r + 8 = 28$$

$$\therefore a + 2r = 5 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a = 1, r = 2 \text{ 또는 } a = 4, r = \frac{1}{2}$$

따라서 (가로 길이, 세로 길이, 높이)가 (1, 2, 4) 또는 (4, 2, 1)이므로 이 직육면체의 모서리의 길이의 합은 $4(1 + 2 + 4) = 28$

17. 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 4$, $S_{2n} = 12$ 이다. S_{6n} 의 값은?

① 252

② 272

③ 292

④ 312

⑤ 332

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 이라 하면

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)(r^n + 1)}{r - 1} = 12 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^4 + 1) = 12$

$$r^n + 1 = 3 \quad \therefore r^n = 2$$

$$S_{6n} = \frac{a(r^{6n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{2n} - 1)(r^{4n} + r^{2n} + 1)}{r - 1}$$

$$= 12(2^4 + 2^2 + 1) = 252$$

18. 재진이가 첫날에 1원, 둘째날에 2원, 셋째날에 4원, ... 과 같이 매일 전날의 2배씩 30일간 계속하여 모았을 때 그 총액은?

① $2^{30} - 2$ (원)

② $2^{30} - 1$ (원)

③ 2^{30} (원)

④ $2^{30} + 1$ (원)

⑤ $2^{30} + 2$ (원)

해설

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_{30} = \frac{1 \cdot (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1(\text{원})$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $\log_3(S_n + 1) = n$ 을 만족할 때, a_3 의 값은?

① 6

② 10

③ 14

④ 18

⑤ 22

해설

$$3^n = S_n + 1$$

$$S_n = 3^n - 1$$

$$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$$

$$a_n = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \quad (n \geq 2)$$

$$= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1$$

$$= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

20. $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) = 62$ 를 만족하는 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \{ \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) - (n^2 - 1) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \{ (k^2 + 1) - (k^2 - 1) \} + (n^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n 2 + (n^2 - 1) = n^2 + 2n - 1 = 62 \end{aligned}$$

이것을 정리하여 인수분해하면 $(n + 9)(n - 7) = 0$

따라서 $n = -9$ 또는 $n = 7$

그런데 $n > 0$ 이므로 $n = 7$

21. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

22. 등차수열 2, 5, 8, $\dots$, 68의 합을 기호 $\sum$ 를 써서 나타내면 $\sum_{k=1}^n (ak + b)$ 이다. 이때 상수 a , b , n 의 합 $a + b + n$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 25

해설

주어진 등차수열은 첫째항이 2, 공차가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1$$

이때, $3n - 1 = 68$ 에서

$$3n = 69 \quad \therefore n = 23$$

$$\text{즉, } 2 + 5 + 8 + \dots + 68 = \sum_{k=1}^{23} (3k - 1)$$

$$\therefore a = 3, b = -1, n = 23$$

$$\therefore a + b + n = 3 - 1 + 23 = 25$$

23. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉞에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

24. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$ 으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 140

해설

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n\{2 \cdot 5 + (n-1)4\}}{2} = n(2n+3)$$

$$\therefore b_n = \frac{n(2n+3)}{n} = 2n+3 \text{ (단, } n \neq 0 \text{)}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항은 $b_1 = 2 + 3 = 5$ 이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$ 인 등차수열이다.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \frac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 36,$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n} = 18 \text{ 일 때,}$$

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n} \text{의 값을 구하여라.}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{2n} - S_n = 18 \text{에서 } S_{2n} = S_n + 18 = 36 + 18 = 54$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r} \\ &= 36 \cdot (1+r^n) = 54 \end{aligned}$$

$$1+r^n = \frac{3}{2} \quad \therefore r^n = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r} \\ &= 36 \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = 63 \end{aligned}$$

이때, $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n} = S_{3n} - S_n$ 이므로
 $63 - 36 = 27$

26. $A = 2^{2014}$, $B = 3^{2014}$ 이라 할 때, 6^{2014} 의 양의 약수의 총합을 A 와 B 로 나타내면?

① $\frac{1}{2}(2A - 1)(3B - 1)$

② $\frac{1}{3}(2A - 1)(3B - 1)$

③ $(2A - 1)(3B - 1)$

④ $(2A + 1)(3B + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(2A + 1)(3B + 1)$

해설

$6^{2014} = 2^{2014} \times 3^{2014}$ 이므로 6^{2014} 의 양의 약수의 총합은
 $(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2014})(3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{2014})$

$$= \frac{2^{2015} - 1}{2 - 1} \times \frac{3^{2015} - 1}{3 - 1}$$

$$= (2^{2015} - 1) \cdot \frac{3^{2015} - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2A - 1)(3B - 1)$$

27. $a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 곱을 $P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 이라 하자. P_n 의 값이 최대일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$a_n > 0$ 이고, $a_n \neq 1$ 이므로

$a_{n+1} > 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} > P_n$,

즉, $P_{n+1} > P_n$

$a_{n+1} < 1$ 이면 $P_n \times a_{n+1} < P_n$, 즉, $P_{n+1} < P_n$

따라서, $a_n > 1$ 인 마지막 항까지의 곱이 P_n 의 최댓값이다.

$$a_n = 3000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1, \quad 2^{n-1} < 3000$$

$$2^{11} = 2048 \text{ 이므로 } n-1 = 11 \quad \therefore n = 12$$

28. 퇴직금으로 받은 2억 원을 은행에 예치하고 매년 말에 일정한 금액을 연금형식으로 받으려고 한다. 퇴직금을 모두 1월 초에 은행에 예치하고, 연말부터 20년간 지급받는다면 매년 말에 받을 금액은?(단, $1.05^{20} = 2.6$, 연이율 5%, 1년마다 복리로 계산한다.)

- ① 1625만원 ② 1734만원 ③ 2085만원
④ 2480만원 ⑤ 2600만원

해설

할부 계산과 마찬가지로 계산 시점은 20년 후 마지막 수령년도를 기준으로 계산한다.

매년 지급받을 연금을 a 만원이라 하면

$$20000 \times 1.05^{20} = \frac{a(1.05^{20} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$20000 \times 2.6 = \frac{a(2.6 - 1)}{0.05}$$

$$\therefore a = \frac{20000 \times 2.6 \times 0.05}{1.6} = 1625(\text{만원})$$

29. $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20}$ 일 때, $100S$ 의 값은?

①

95

② 100

③ 105

④ 110

⑤ 115

해설

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 20} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} \\ \therefore 100S &= 100 \times \frac{19}{20} = 95 \end{aligned}$$

30. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ 의 값이 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는?

$$a_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}, a_2 = \sqrt{5+2\sqrt{6}}, a_3 = \sqrt{7+2\sqrt{12}}, \dots$$

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$a_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$a_3 = \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

$\vdots$

$$a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$S_n = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$S_n = \sqrt{n+1} - 1$ 이 한자리 자연수가 되어야 한다.

$$S_3 = \sqrt{4} - 1 = 1$$

$$S_8 = \sqrt{9} - 1 = 3 - 2 = 2$$

$\vdots$

$$S_{120} = \sqrt{121} - 1 = 11 - 1 = 10$$

$\therefore$ 9개

31. x 에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값은?

① $\alpha + \beta = \frac{1}{11}, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$

② $\alpha + \beta = \frac{10}{11}, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$

③ $\alpha + \beta = \frac{10}{11}, \alpha\beta = -\frac{2}{11}$

④ $\alpha + \beta = 11, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$

⑤ $\alpha + \beta = 11, \alpha\beta = -22$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2 \text{ 이고,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} &= x \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= x \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= x \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{10}{11}x \end{aligned}$$

$$\text{또, } \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55 \text{ 이므로 주어진 이차방정식은 } 10x^2 - \frac{10}{11}x - 55 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$$

$$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$$

32. 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = 3^n - 10 \left\lfloor \frac{3^n}{10} \right\rfloor, \quad b_n = 7^n - 10 \left\lfloor \frac{7^n}{10} \right\rfloor \text{ 일 때,}$$

$\sum_{n=1}^{50} a_n - \sum_{n=1}^{50} b_n$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① -50

② -25

③ -10

④ -8

⑤ -4

해설

$n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 를 구해보면

$$a_1 = a_5 = a_9 = \dots = 3$$

$$a_2 = a_6 = a_{10} = \dots = 9$$

$$a_3 = a_7 = a_{11} = \dots = 7$$

$$a_4 = a_8 = a_{12} = \dots = 1$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하여 $b_1, b_2, b_3, \dots$ 를 구해보면

$$b_1 = b_5 = b_9 = \dots = 7$$

$$b_2 = b_6 = b_{10} = \dots = 9$$

$$b_3 = b_7 = b_{11} = \dots = 3$$

$$b_4 = b_8 = b_{12} = \dots = 1$$

이므로 자연수 k 에 대하여

$$a_n - b_n = \begin{cases} -4(n = 4k - 3) \\ 0(n = 4k - 2) \\ 4(n = 4k - 1) \\ 0(n = 4k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{50} a_n - \sum_{n=1}^{50} b_n &= \sum_{n=1}^{50} (a_n - b_n) \\ &= 12 \sum_{n=1}^4 (a_n - b_n) + (-4) + 0 = -4 \end{aligned}$$